AUFGABEN (TEIL A)

1) Bestimme x:

a) $2^x = 16$

b) $x^3 = -27$

c) $5^x = 1$

d) $5^x = \frac{1}{25}$

e) $\log_2(8) = x$

d) $\log_x(49) = 2$

e) $\log_2(x) = 5$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

g) $\log_a(a^3) = x$

h) $\log_x(121) = 2$

i) $\log_7(x) = 0$

2) Löse die Gleichungen:

a) $\log_2(x+7) = 4$

b) $\log_2(2x+4) - 3 = 2$

3) Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x-6) \cdot e^{3x}$

b) $f(x) = (4x+8) \cdot e^{2x+4}$

c) $f(x) = (x^2+2x-3) \cdot e^{2x+5}$

d) $f(x) = (x^3+5x^2) \cdot e^{2x-1}$

e) $f(x) = (x^3-4x) \cdot e^{2x+3}$

f) $f(x) = (x^4-10x^2+9) \cdot e^{2x}$

g) $f(x) = (x^5-8x^3+16x) \cdot e^{3x-5}$

h) $f(x) = e^{2x} - 4e^{x} + 4$

i) $f(x) = 2e^{x} - \frac{4}{e^{x}}$

4) Löse die folgenden Gleichungen

a) $(2x^2-8) \cdot (e^{2x}-6) = 0$

b) $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

c) $4e^{2x} + 6e^{x} = 4$

5) Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = (2x+1) \cdot e^x$

c) $f(x) = (2x^2+6x+4) \cdot e^x$

d) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

e) $f(x) = (\sin(x))^2$

6) Bestimme die erste, zweite, dritte und allgemein die n-te Ableitung von $f(x) = (2x+3) \cdot e^x$

7) Gib das Fernverhalten der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = (2x+9) \cdot e^{-3x+4}$

b) $f(x) = (-5x+2) \cdot e^{3x}$

c) $f(x) = (-2x+1) \cdot e^{x^2+1}$

d) $f(x) = (x^2+2x+3) \cdot e^{2x}$

e) $f(x) = (5x+1) \cdot e^{5x+7}$

8) Ordne den Funktionsgleichungen jeweils den richtigen Graphen zu:

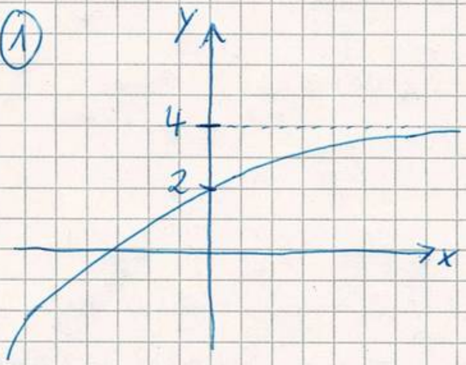
$f(x) = 3e^{x}$

$g(x) = (x+1) \cdot e^{0{,}1x}$

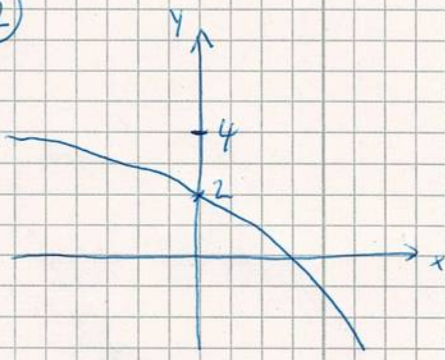
$h(x) = -2 \cdot e^{-x}$

$i(x) = 4 - 2 \cdot e^{-0{,}1x}$

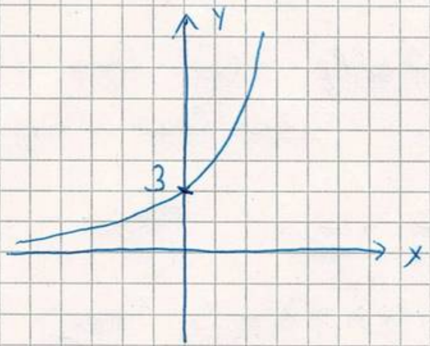
(1)



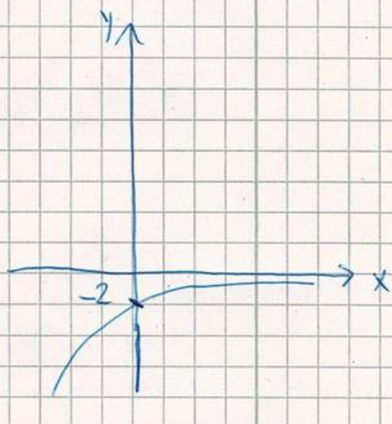
(2)



(3)



(4)



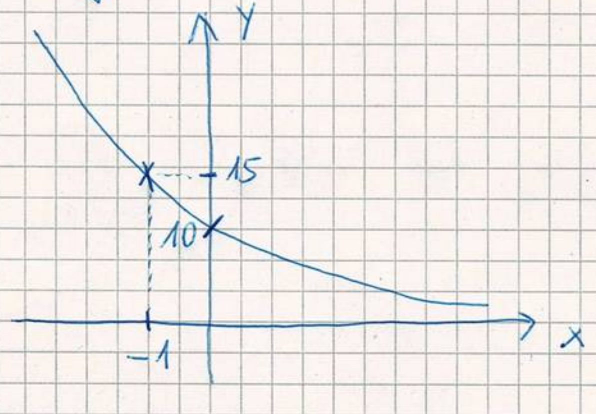
(5)

9) Gegeben ist die Funktion
$f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

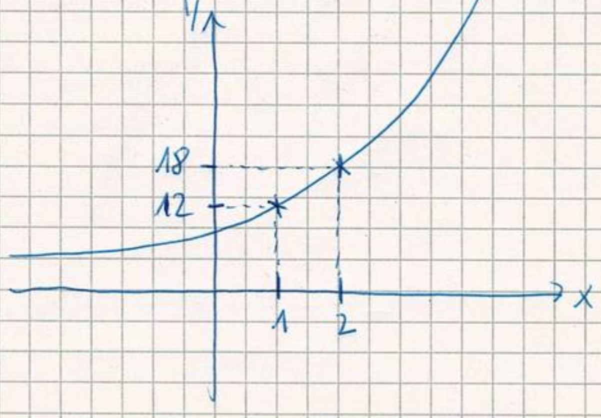
a) Bestimme die Nullstellen
b) Zeige, dass die Funktion $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist.
Gib die Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt

10) Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion. Bestimme eine Funktionsgleichung:

a)



b)



11) [Abitur BW 2005]

Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.

b) Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bild 1

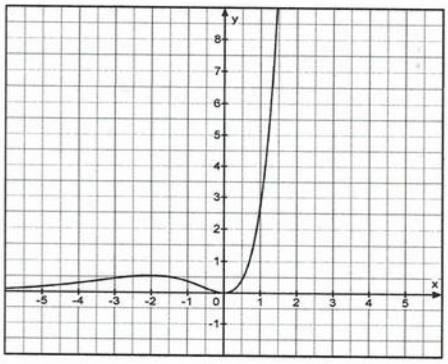


Bild 2

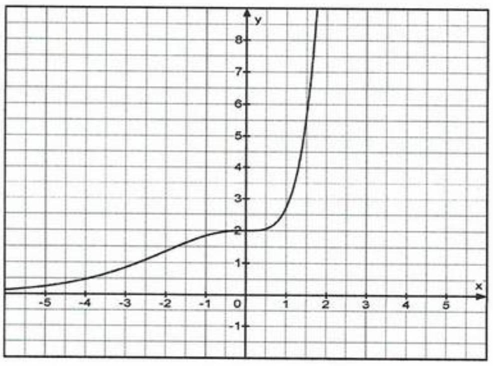


Bild 3

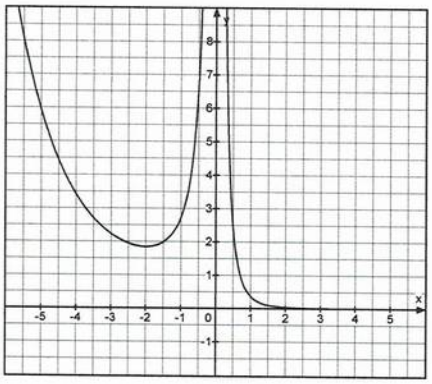
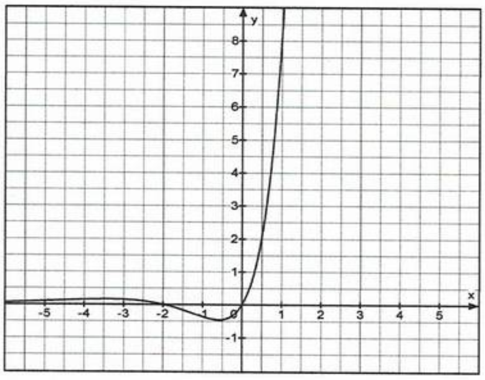


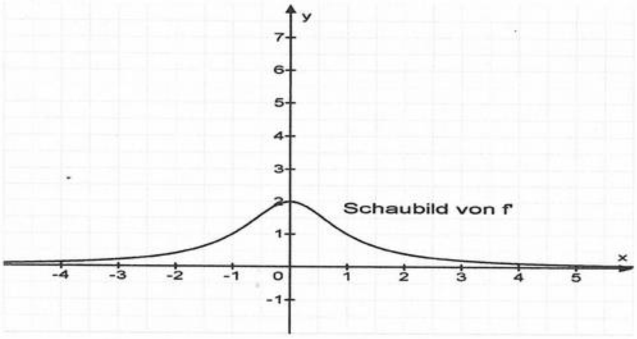
Bild 4



12) Für jedes $t \neq 0$ ist eine Funktion $f_t(x) = (x-1) \cdot (1 - \frac{1}{t} \cdot e^x)$ gegeben. Bestimme die Werte von t, für die f_t mehr als eine Nullstelle besitzt.

13) [Abitur BW 2004]

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar ? Begründen Sie Ihre Antworten.



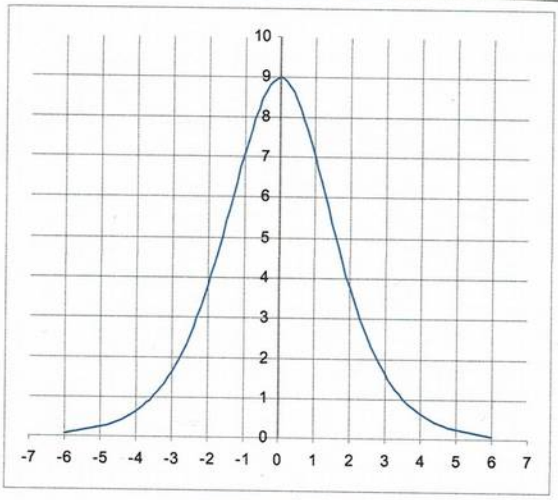
1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.

14) [Abitur BW 2002]

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_a.



a) Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.

b) Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Graphen von f_{36} und g.

Für welche Werte von a hat der Graph von f_a mit dem Graphen der Funktion g einen Punkt gemeinsam? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie diesen Punkt an.

AUFGABEN (Teil B)

1) Eine Bakterienkultur hat um 9 Uhr eine Größe von 10 cm². Sie wächst pro Stunde um 8 %.

a) Beschreibe das Wachstum der Bakterienkultur mit einer Exponentialfunktion

b) Bestimme die Größe der Kultur um 10:12 Uhr?

c) Bestimme rechnerisch die Zeit, welche die Kultur für eine Verdopplung ihrer Größe braucht

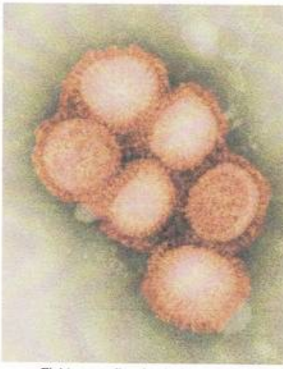
d) Eine zweite Kultur lässt sich mit der Funktion $g(x) = 20 \cdot 1{,}04^x$ beschreiben, wobei x die Zeit in Stunden ab 10 Uhr ist und g(x) die Größe in cm².
Bestimme rechnerisch, wann die beiden Kulturen gleich groß sind
Und gib an, welche der beiden Kulturen schneller wächst.

e) Eine dritte Kultur ist um 9 Uhr 8 cm² groß. Sie wächst schneller als die erste. Um 11 Uhr ist sie genauso groß wie Kultur 1.
Beschreibe das Wachstum von Kultur 3 mit einer Exponentialfunktion

f) Um 12 Uhr wird die Hälfte der ersten Kultur durch einen Labortechniker entfernt. Bestimme rechnerisch, wie lange sie braucht um die verlorene Fläche erneut zu bedecken.

2) [Abitur Bremen 2011]

Ausbreitung der Schweinegrippe



Elektronenmikroskopisches Bild einiger Influenza-A/H1N1-Viren.
(Quelle: Wikipedia, 25.1.2010)

Im Jahr 2009 breitete sich das Virus A/H1N1 weltweit aus. Es verursacht die sogenannte Schweinegrippe. In Deutschland gab es zwei Grippewellen, die kurz aufeinander folgten.

Die Schweinegrippe war meldepflichtig. Das Robert-Koch-Institut in Berlin sammelte und veröffentlichte die Daten zur Ausbreitung der Schweinegrippe in Deutschland.

Für die zweite Grippewelle wurden ab der 39. Kalenderwoche 2009 folgende Zahlen gemeldet:

Zeit t in Wochen ab der 39. Kalenderwoche	0	1	2	3	4	5
Anzahl der insgesamt infizierten Patienten[1]	1 474	2 344	3 379	4 680	7 021	10 358

a) Die Daten sollen durch eine Exponentialfunktion modelliert werden.
Bestimmen Sie aus den Daten durch eine einfache Rechnung einen Wachstumsfaktor für die Anzahl der insgesamt infizierten Patienten.
Ermitteln Sie daraus eine Exponentialfunktion f mit $f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$, die die Anzahl $f(t)$ der insgesamt infizierten Patienten aus der Tabelle in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Wochen ab der 39. Kalenderwoche) modelliert.
Beurteilen Sie kurz, ob die Funktion f ein geeignetes Modell ist, um die Entwicklung der Schweinegrippe zu beschreiben.

Bestimme mit der Funktion f, wann die Anzahl der infizierten Patienten 5000 beträgt.

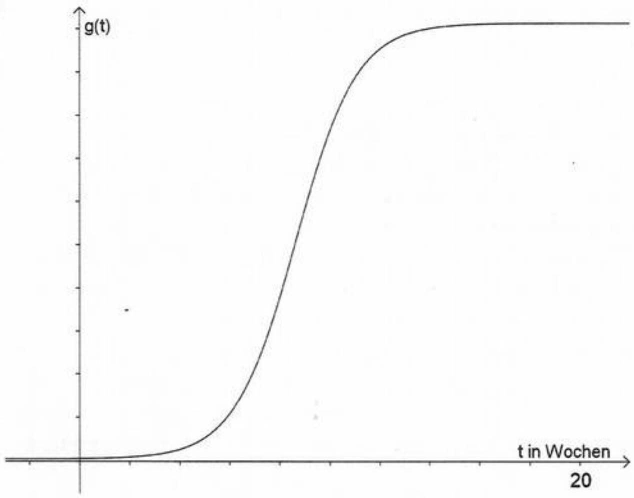
Die Anzahl der insgesamt infizierten Patienten wird für einen längeren Zeitraum durch eine Funktion g mit

$$g(t) = \frac{201\,632}{1 + 1\,222 \cdot e^{-0{,}8165 \cdot t}}$$

modelliert; sie liefert für $t \geq 5$ „gute" Werte. Der Zeitpunkt $t = 0$ entspricht wiederum der 39. Kalenderwoche im Jahr 2009.

b) Vervollständigen Sie die Skizze des Graphen der Funktion g für $t \in [0;20]$ (siehe nächste Seite), indem Sie Zahlenwerte an die Achsen schreiben. Bestimmen Sie $g(5)$ und $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$, und interpretieren Sie diese Größen im Sachzusammenhang.

c) Eine Zeitung meldete, dass „der Höhepunkt der Schweinegrippe nun überschritten" sei, obwohl auch nach diesem Zeitpunkt (wir nennen ihn t_0) die Anzahl der insgesamt infizierten Patienten noch zunahm.
Interpretieren Sie die Zeitungsaussage im Rahmen des mathematischen Modells.
Geben Sie einen Rechenweg an, wie der Zeitpunkt t_0 bestimmt werden kann, auf den sich die Zeitungsaussage bezieht. (Die Rechnung soll nicht durchgeführt werden!)
Tragen Sie den ungefähren Zeitpunkt in die Skizze aus Aufgabe b) ein.



Die Skizze des Graphen der Funktion g.

d) Die zeitliche Entwicklung verschiedener Epidemien kann mit einer Funktionenschar q_k mit

$$q_k(t) = \frac{-k^3 + 6k^2}{k + 41{,}29 \cdot e^{-0{,}8165 \cdot t}}$$

für $0 < k \leq 6$ modelliert werden; dabei ist $t \geq 0$ die Zeit in Wochen, und q_k gibt die Anzahl der insgesamt infizierten Patienten in Millionen an.

Bestimmen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} q_k(t)$ für beliebiges k. Erläutern Sie den Wert.

Bestimmen Sie den Wert des Parameters k, für den langfristig die meisten infizierten Patienten auftreten. Berechnen Sie die entsprechende Anzahl der langfristig infizierten Patienten.

3) [Abitur Bremen 2009]

DSL-Boom

In regelmäßigen Abständen werden neue Zahlen zu den DSL-Internet-Zugängen veröffentlicht. Die nebenstehende Grafik zeigt die Entwicklung vom Jahr 2002 bis zum Jahr 2006.

Quelle: BITKOM (Bundesverband der Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien)

Durch die Analyse der Daten eines zurückliegenden Zeitraums versucht man Vorhersagen für die Zukunft abzuleiten. Dazu werden mathematische Modelle entwickelt.

In einer ersten Modellannahme soll exponentielles Wachstum angenommen werden. Die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=3{,}3\cdot e^{0{,}37\cdot x}$ beschreibt die Anzahl DSL-Anschlüsse in Millionen zum Zeitpunkt x in Jahren ($x=0$ entspricht Ende 2002).

a) Zeigen Sie, dass die angenommene Funktion f für die Vorhersage der DSL-Anschlüsse der Jahre 2002 und 2005 eine gute Annäherung darstellt. Stellen Sie den Graf der Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Ergänzen Sie in der Darstellung den Verlauf bei linearem Wachstum mit den Daten der Jahre 2002 und 2005. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $g(x)$ des linearen Wachstums.

b) Bestimmen Sie für die Modellannahme des exponentiellen Wachstums den Wachstumsfaktor und die prozentuale Zunahme der DSL-Anschlüsse pro Jahr.
Bestimmen Sie außerdem die Verdopplungszeit für die Zahl der DSL-Anschlüsse.

c) Bestimmen Sie, wann nach diesem Wachstumsmodell dreiviertel aller Haushalte in Deutschland einen DSL-Anschluss haben müssten, wenn von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten ausgegangen wird. Geben Sie die Umformungsschritte an, die auf die Lösung führen.
Begründen Sie, warum die weitere Entwicklung über einen längeren Zeitraum vermutlich mit der obigen Funktionsgleichung nicht vorhergesagt werden kann.

In einem anderen Modell wird angenommen, dass sich die zukünftige Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen besser beschreiben lässt durch eine Funktionsgleichung vom Typ

$$h(x)=35-(35-a)\cdot e^{-0{,}13\cdot x}.$$

x in Jahren ($x=0$ entspricht hier Ende 2005), $h(x)$ in Millionen DSL-Anschlüsse.

Benutzen Sie diese Funktionsgleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

d) Bestimmen Sie mit der Anzahl der DSL-Anschlüsse am Ende des Jahres 2005 der obigen Statistik der BITKOM einen Wert für a in Mio. Anschlüssen.
Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ und beurteilen Sie, wie viele Haushalte nach diesem Modell langfristig ohne DSL-Anschluss verbleiben, wenn pro Haushalt immer nur ein DSL-Anschluss eingeplant wird. Gehen Sie dabei wieder von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus. Nennen Sie Gründe dafür, dass dieser Modellierungsansatz der Realität vermutlich näher kommen wird.

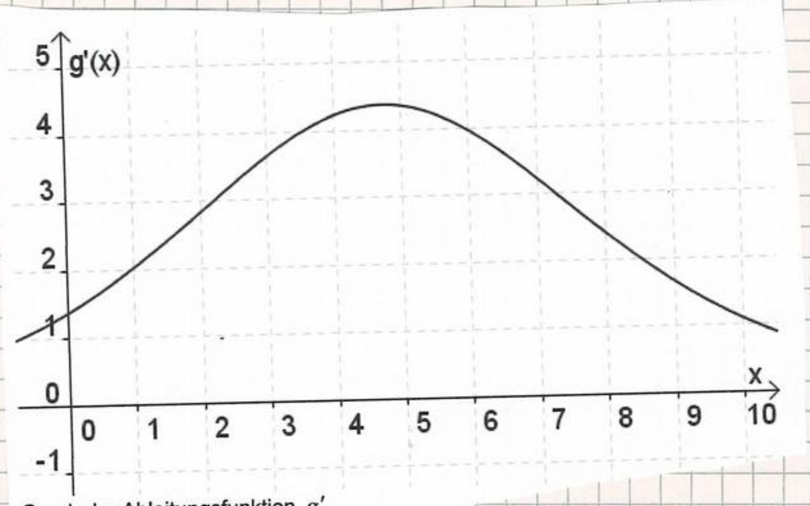
In einer 3. Modellannahme legen wir logistisches Wachstum mit der Funktionsgleichung

$$g(x)=\frac{105}{3+32\cdot e^{-0{,}5\cdot x}}$$

zugrunde. Sie erfasst die bisherigen DSL-Anschlüsse jeweils am Jahresende hinreichend gut. Wieder gilt: x in Jahren ($x=0$ entspricht Ende 2002), $g(x)$ in Millionen DSL-Anschlüssen zum Zeitpunkt x. Benutzen Sie diese Gleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

e) Zeigen Sie, dass die Prognosefunktion g die Werte der vergangenen Jahre 2002 und 2005 relativ gut wiedergibt und berechnen Sie einen Vorhersagewert für 2010.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ und erläutern Sie seine Bedeutung für eine langfristige Vorhersage. Gehen Sie dabei von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus.

f) Der nachfolgend angegebene Graph ist der Graph von g'.
Lesen Sie aus dem Graphen die Koordinaten des Maximums von g' näherungsweise ab.
Beschreiben Sie dessen Bedeutung bei der Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen und für den Graphen der Funktion g.
Beschreiben Sie den Lösungsweg zur genauen Berechnung des Maximums von g', wenn Ihnen keine Skizze vorliegt. Die Ausführung der Rechnung wird nicht erwartet.



Graph der Ableitungsfunktion g'

4) Gegeben ist die Funktion
$f(x) = (x+2) \cdot e^{x+1}$

a) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

b) Bestimme die Ableitung von f

c) Gib das Fernverhalten von f an

d) Bestimme den Schnittpunkt von f mit $g(x) = (3x-1) \cdot e^{x+1}$

e) Bestimme den Schnittpunkt von f mit $h(x) = e^{x}$

5) [Abitur Berlin 2014]

Gegeben ist die Funktionsschar f_a mit $f_a(x) = (ax+1) \cdot e^{-ax}$; $x \in IR$; $a \in IR$.
Die Graphen dieser Funktionsschar f_a sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.
Bestimmen Sie den Wert des Parameters a, für den die Scharfunktion keine Nullstelle hat, und geben Sie die zugehörige Funktionsgleichung an.

b) Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhängigkeit von a ($a \neq 0$) an.

c) In der Anlage sind zwei Graphen der Funktionsschar f_a dargestellt.

Begründen Sie, dass es sich dabei um die Graphen G_2 und G_{-2} handelt und beschriften Sie die Graphen in der Anlage.