LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1 a) $E: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$ Parameterform

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

$E: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{OX} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$ Normalenform

$E: x + 2y - 4z = d$

Einsetzen des Aufpunkts:

$1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = d$

$1 = d$

$\Rightarrow E: x + 2y - 4z = 1$ Koordinatenform

b) Bestimmung des Lotfußpunkts:

$g_h: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Einsetzen in E:

$4 + r + 4r - 24 + 16r = 1$

$-20 + 21r = 1$

$$21r = 21$$
$$r = 1$$

$$\Rightarrow \vec{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{OD'} = \vec{OD} + 2 \cdot \vec{DL}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5-4 \\ 2-0 \\ 2-6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow D'(6/4/-2)$$

c) Schnittpunkt mit x-Achse:

$y = z = 0 \Rightarrow x = 1$

Schnittpunkt mit y-Achse:

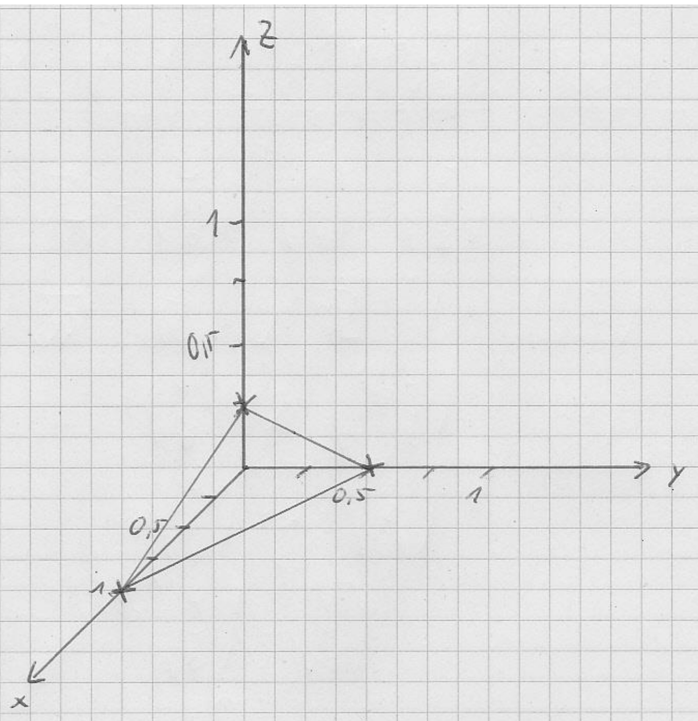
$x = z = 0 \Rightarrow 2y = 1$

$y = 0{,}5$

Schnittpunkt mit z-Achse:

$x = y = 0 \Rightarrow -4z = 1$

$z = -0{,}25$



d) gesucht: Ebene F

$F \parallel E \Rightarrow F: x + 2y - 4z = d$

gesucht: d

D liegt in F $\Rightarrow$ $4 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 6 = d$

$4 - 24 = d$

$-20 = d$

$\Rightarrow F: x + 2y - 4z = -20$

e) Einsetzen in E:

$1 + 2 + 2r - 20 = -20$

$2r - 17 = -20$

$2r = -3$

$r = -1{,}5$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S\,(1/-0{,}5/5)$

2) Es gilt:

Schnittpunkte

x-Achse $P_x\,(4/0/0)$

y-Achse $P_y\,(0/3/0)$

z-Achse $P_z\,(0/0/5)$

gesucht: $ax + by + cz = d$

wegen P_x: $4a = d$

$a = \frac{d}{4}$

wegen P_y: $3b = d$

$b = \frac{d}{3}$

wegen P_z: $5c = d$

$c = \frac{d}{5}$

$\Rightarrow \frac{d}{4}x + \frac{d}{3}y + \frac{d}{5}z = d$

wir wählen $d = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$\Rightarrow E: 15x + 20y + 12z = 60$

3) a) Variante 1

Für E_1: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Für E_2: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind keine Vielfache

Variante 2

Wir suchen einen Punkt, der nur in einer der Ebenen liegt:

bei E_1: $x = z = 0 \Rightarrow -y = 12$

$y = -12$

$\Rightarrow P(0/-12/0)$

P liegt nicht auf E_2, da $5 \cdot (-12) \neq -6$

b) Wir wählen $x = y = 0$ bei E_1

$\Rightarrow -4z = 12$

$z = -3$

$\Rightarrow P(0/0/-3)$

P liegt auf E_2, da $2 \cdot (-3) = -6$ ✓

Zu beachten ist, dass der Wert bei y dafür sorgt, dass die Gleichungen keine Vielfache voneinander sind!

c) $E_2: -3x + \underline{\underline{0{,}5}}y + 2z = -6$

$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind nun Vielfache voneinander.
Die ganzen Gleichungen sind Vielfache voneinander.

4) a) $g: \vec{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q\,(0|a|0)$

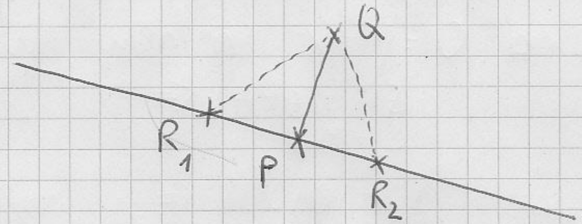
$\vec{PQ} \perp g \Rightarrow \vec{PQ} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 - (-3) \\ a - 2 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ a-2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$3 + 3a - 6 = 0$$
$$3a - 3 = 0$$
$$3a = 3$$
$$\underline{a = 1}$$

b)



R_1 und R_2 haben denselben Abstand von Q, wenn sie denselben Abstand von P (dem Aufpunkt der Geraden) haben.
$R_1 R_2 Q$ ist ein gleichschenkliges Dreieck mit $\vec{PQ}$ ($\vec{PQ} \perp g$) als Mittelsenkrechte und Höhe.

Daher: $\vec{OR_1} = \vec{OP} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

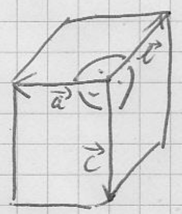
$\vec{OR_2} = \vec{OP} + (-t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

5) a) Ein Quader (die dreidimensionale Entsprechung des Rechtecks) liegt vor, wenn alle Winkel rechte Winkel sind.

$$\vec{a} \circ \vec{c_t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = 8t + 2t - 10t = 0$$

$$\vec{b} \circ \vec{c_t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4t \\ 2t \\ -5t \end{pmatrix} = -4t + 4t = 0$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 + 2 = 0$$



Da alle anderen Seiten des Körpers parallel zu $\vec{a}$, $\vec{b}$ bzw $\vec{c_t}$ sind, sind alle Winkel gleich $90°$.

$\Rightarrow$ Der Körper ist ein Quader.

b) Da rechte Winkel vorliegen, können wir rechnen:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{c_t}| = 15$$

$$\sqrt{4+1+4} \cdot \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{16t^2 + 4t^2 + 25t^2} = 15$$

$$\sqrt{9} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{45t^2} = 15$$

$$\sqrt{2025t^2} = 15 \quad |()^2$$

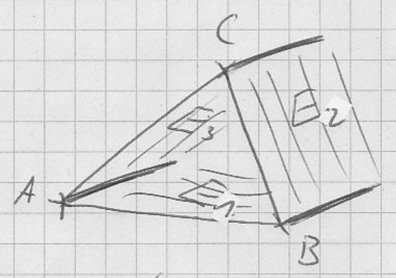
$$2025t^2 = 225 \quad |:2025$$

$$t^2 = \frac{1}{9} \quad |\sqrt{\ }$$

$$t_1 = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = -\frac{1}{3}$$

6)



A (0/0/0)
B(0/4/0)
C(0/2/4)

$$E_1: \vec{OX} = \vec{OA} + r_1 \cdot \vec{AB} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{OX} = \vec{OB} + r_2 \cdot \vec{BC} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E_3: \vec{OX} = \vec{OC} + r_3 \cdot \vec{CA} + s_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E_1: \vec{OX} = r_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + s_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{OX} = \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E_3: \vec{OX} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Schnittgeraden:

E_1/E_2 $\quad g_s: \vec{OX} = \vec{OB} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

E_2/E_3 $\quad g_s: \vec{OX} = \vec{OC} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

E_1/E_3 $\quad g_s: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

7) a) $E_1: 2x - 2y + z = 1$

$$E_2: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{array}$$

$E_2: 4x - 4y + 2z = d$

Einsetzen des Aufpunkts:

$4 \cdot 7 - 4 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = d$

$10 = d$

$E_2: 4x - 4y + 2z = 10$

Normalenvektor von E_1: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

" von E_2: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind Vielfache

Die Gleichungen in Koordinatenform sind keine Vielfache voneinander

$\Rightarrow E_1 \parallel E_2$

b) Wir bestimmen den Lotfußpunkt von $A(7/7/5)$ auf E_1

$$g_h: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in E_1:

$2(7 + 2r) - 2(7 - 2r) + 5 + r = 1$

$14 + 4r - 14 + 4r + 5 + r = 1$

$$9r + 5 = 1$$
$$9r = -4$$
$$r = -\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{OL} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für einen Punkt M in der Mitte zwischen E_1 und E_2 gilt:

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \left(-\frac{2}{9}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/9 \\ 4/9 \\ -2/9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 63/9 \\ 63/9 \\ 45/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/9 \\ 4/9 \\ -2/9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 59/9 \\ 67/9 \\ 43/9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_3: 2x - 2y + z = d$$

Einsetzen von M:

$$\frac{118}{9} - \frac{134}{9} + \frac{43}{9} = d$$
$$\frac{27}{9} = d$$
$$3 = d$$

$$\Rightarrow E_3: 2x - 2y + z = 3$$

Die gesuchte Ebene muss in der Mitte zwischen E_1 und E_2 verlaufen.

8) $g: \vec{OX} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -3 - (-1) \\ 0 - 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Da $g \perp E \Rightarrow$ Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$E: \; x - 2y - 3z = d$

Einsetzen von C:

$$4 - 6 + 24 = d$$
$$22 = d$$
$$\Rightarrow x - 2y - 3z = 22$$

Schnittpunkt:

$$1 + r - 2(-1 - 2r) - 3(3 - 3r) = 22$$
$$1 + r + 2 + 4r - 9 + 9r = 22$$
$$14r - 6 = 22$$
$$14r = 28$$
$$r = 2$$

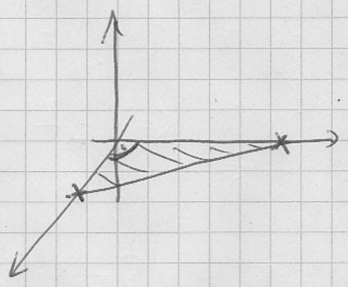
$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(3/-5/-3)$

9) a)

Schnittpunkt von E mit der x -Achse ist $P_1(-9|0|0)$.
Schnittpunkt von E mit der y -Achse ist $P_2(0|-18|0)$.
Das Dreieck P_1P_2O hat die Fläche $\frac{9 \cdot 18}{2} = 81$.



b)

Jeder Normalenvektor von E hat die Form $\begin{pmatrix} 2r \\ r \\ -2r \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Als Ortsvektor eines Punktes der Ebene E müssen die durch seine Komponenten gegebenen Punktkoordinaten die Ebenengleichung erfüllen.
Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2r + r - 2 \cdot (-2r) &= -18 \\ 9r &= -18 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

Der gesuchte Ortsvektor $\vec{v}$ ist:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

10)

a)	Der Flächeninhalt ist: $\frac{1}{2} \cdot \left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert \cdot \left\lvert\overrightarrow{BC}\right\rvert = \frac{1}{2} \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert \cdot \left\lvert\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rvert = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9+16} \cdot \sqrt{16+9} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 = \frac{25}{2}$
b)	Das Volumen V der Pyramide ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{2} \cdot h = 25$, wobei h die Höhe der Pyramide ist. Daraus ergibt sich $h = 6$. Ein möglicher Punkt ist $D(3\|3\|9)$. *(Jede Punktangabe, mit einer z-Koordinate $z = 9$ oder $z = -3$ ist als richtig zu bewerten.)*

11a)

Ein Richtungsvektor der Geraden g ist $\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor ist kollinear zum Normalenvektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Ebene E: $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Somit steht g senkrecht auf E.

kollinear $\hat{=}$ · Vielfache voneinander sein
· parallel sein

b)

Der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ ergibt sich mit

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ zu $M(3|1|4)$.

Der Punkt $M(3|1|4)$ liegt in F und F ist parallel zu E.

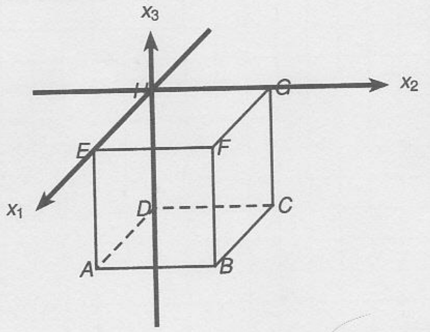
F ist also von der Form $F: 2x + y + 2z = d$ mit $d \in \mathbb{R}$.

Einsetzen von M in F liefert $6 + 1 + 8 = d$ und somit $d = 15$.

Also ist $F: 2x + y + 2z = 15$.

12) a)

Das eingezeichnete Koordinatensystem:



Es ist $A(2|0|-2)$.

(Auf die Skalierung der Achsen kann verzichtet werden.)

b)

Es ist $P(2|2|z)$, wobei $-2 \le z \le 0$ ist.

Dann ist $|\overrightarrow{HP}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (z)^2} = 3$ und damit $(z)^2 = 1$.

Aus $-2 \le z \le 0$ ergibt sich $P(2|2|-1)$.

$$\sqrt{2^2 + 2^2 + z^2} = 3$$
$$\sqrt{4 + 4 + z^2} = 3$$
$$\sqrt{8 + z^2} = 3 \quad |(\,)^2$$
$$8 + z^2 = 9$$
$$z^2 = 1$$

13) $g_1: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$g_2: \vec{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

14) a)

Das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren ist:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \cdot a + 3 \\ 2 \\ 1 + a \end{pmatrix} = 10a + 15 + 4 - 1 - a = 9a + 18$$

Die Richtungsvektoren sind senkrecht zueinander für $9a + 18 = 0$ bzw. $a = -2$.
Somit stehen g und h_{-2} zueinander senkrecht.

b)

Die Schnittgleichung für g und h_{-2} lautet:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

also ergeben sich die drei Gleichungen:

I) $5 \cdot t + s = 3$

II) $2 \cdot t - 2 \cdot s = 6$

III) $-t + s = -3$

Aus III) erhält man $s = -3 + t$. Einsetzen in II) ergibt $2t - 2 \cdot (-3 + t) = 6$, also eine wahre Aussage.
Mit Einsetzen in I) erhält man $5t - 3 + t = 3$, also $t = 1$.
Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt, dass g und h_{-2} sich schneiden.