LÖSUNGEN (Fortsetzung Teil B)

4a) Scheitelpunkt $S(2/-0{,}5)$

$\Rightarrow g(x) = a \cdot (x-2)^2 - 0{,}5$

$A(1/0)$ auf $g \Rightarrow g(1) = 0$

$$a(1-2)^2 - 0{,}5 = 0$$
$$a \cdot 1^2 - 0{,}5 = 0$$
$$a = 0{,}5$$

$$\Rightarrow g(x) = 0{,}5 \cdot (x-2)^2 - 0{,}5$$
$$= 0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 0{,}5$$
$$= 0{,}5x^2 - 2x + 2 - 0{,}5$$
$$= 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$$

b) $f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1 + 4 - 3 = 0$

$g(1) = \frac{1}{2} \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 1{,}5 = 0{,}5 - 2 + 1{,}5 = 0$

$\Rightarrow S_x(1/0)$ gemeinsamer Punkt von f und g

weitere Schnittpunkte:

$f(x) = g(x)$
$-x^3 + 4x^2 - 3x = 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$

GTR...

$x_1 = -0{,}5$
$x_2 = 1$
$x_3 = 3$

$g(-0{,}5) = 2{,}625$

$g(3) = 0$

$\Rightarrow$ weitere Punkte: $S_1\,(-0{,}5/2{,}625)$
$S_2\,(3/0)$

c) $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$
$f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$
$f''(x) = -6x + 8$

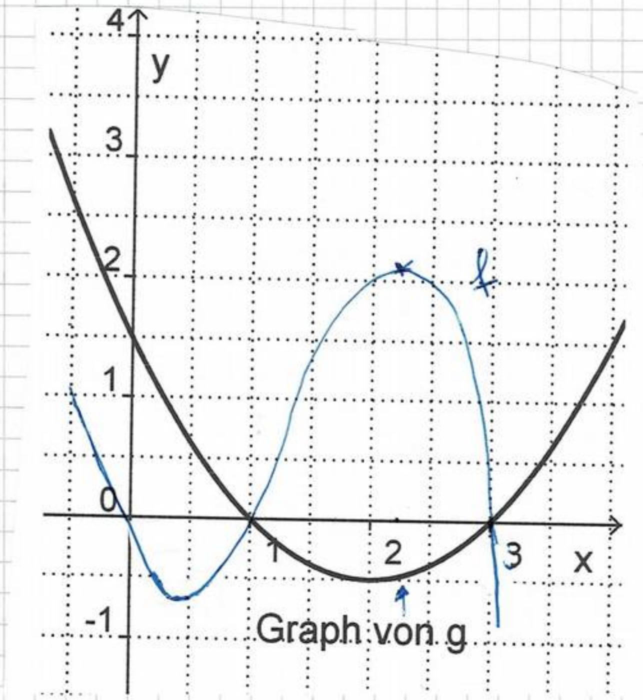
Notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$-3x^2 + 8x - 3 = 0$
GTR...
$x_1 = 0{,}45$
$x_2 = 2{,}22$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0{,}45) = 5{,}3 \Rightarrow$ TP bei $x = 0{,}45$
$f''(2{,}22) = -5{,}32 \Rightarrow$ HP bei $x = 2{,}22$

Koordinaten:
$f(0{,}45) = -0{,}63$
$f(2{,}22) = 2{,}11$

$\Rightarrow$ HP $(2{,}22/2{,}11)$
TP $(0{,}45/-0{,}63)$

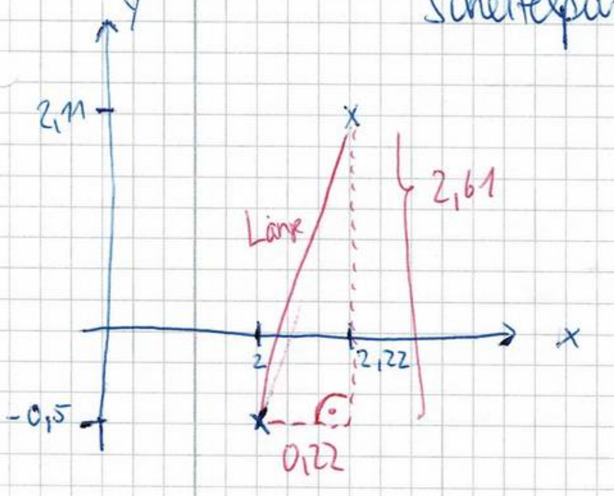


d) nördlichster Punkt:

HP von f: HP $(2{,}22 \mid 2{,}11)$

südlichster Punkt:

Scheitelpunkt von g: $S(2 \mid -0{,}5)$



$\text{Länge}^2 = 0{,}22^2 + 2{,}61^2$

$\text{Länge}^2 = 6{,}8605$

$\text{Länge} \approx 2{,}62 \text{ km}$

e)
$$A = \int_1^3 f(x) - g(x)\, dx$$

$$= \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x - (0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5)\, dx$$

$$= \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x - 0{,}5x^2 + 2x - 1{,}5\, dx$$

$$= \int_1^3 -x^3 + 3{,}5x^2 - x - 1{,}5\, dx$$

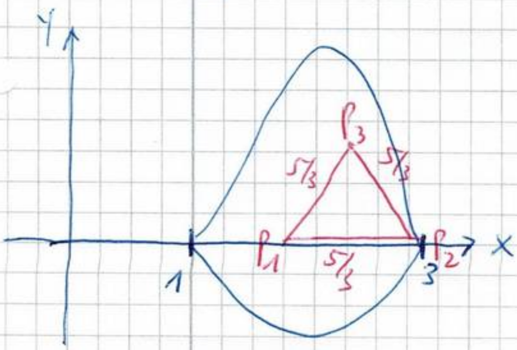
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3{,}5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1{,}5 \right]_1^3$$

GTR...

$= 3{,}\overline{3}$ FE

$= 3{,}\overline{3}\ km^2$

f)



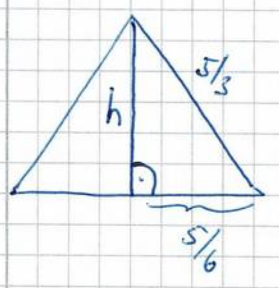
5 km langer Kurs

$\hat{=}$ Umfang des gleichs. Dreiecks 5 km

$\Rightarrow$ eine Seite ist $5/3$ km lang

Daher: $P_1 (4/3 \mid 0)$
$P_2 (3 \mid 0)$

$$3 - \frac{5}{3} = \frac{9}{3} - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

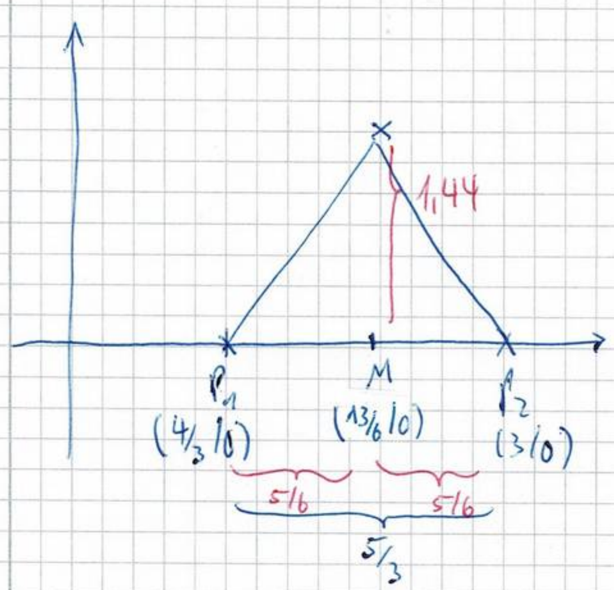


$$h^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$h^2 + \frac{25}{36} = \frac{25}{9}$$

$$h^2 = \frac{25}{12}$$

$$h \approx 1{,}44$$



$$\Rightarrow P_3\left(\frac{13}{6} \,\middle|\, 1{,}44\right)$$

5a) ① $f_2(x) = -\frac{6}{512}x^4 + \frac{12}{32}x^2$

$$f_3(x) = -\frac{9}{512}x^4 + \frac{27}{32}x^2$$

$f_2(2) = 1{,}3125$

$\Rightarrow$ f_2 muss Graph V sein

Bei allen anderen ist $f_k(2) \geq 2$

$f_3(2) = 3{,}09375$

$\Rightarrow f_3$ muss Graph II sein
Er hat als einziger ungefähr
$f_k(2) \approx 3$

(II) Alle Exponenten sind gerade. Daher sind alle Funktionen symmetrisch zur y-Achse.

(III) $f_k(x) = -\frac{3k}{512} x^4 + \frac{3k^2}{32} x^2$

$f_k'(x) = -\frac{12k}{512} x^3 + \frac{6k^2}{32} x$

Notw. Bed.: $f_k'(x) = 0$

$-\frac{12}{512} k x^3 + \frac{6}{32} k^2 x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{12}{512} k x^2 + \frac{6}{32} k^2\right) = 0$

$x_1 = 0 \qquad -\frac{12}{512} k x^2 + \frac{6}{32} k^2 = 0$

$-\frac{12}{512} k x^2 = -\frac{6}{32} k^2 \quad | \cdot 512$

$-12 k x^2 = -96 k^2 \quad | : (-12)$

$k x^2 = 8 k^2 \quad | : k \ (k \neq 0)$

$x^2 = 8k$

$x_2 = -\sqrt{8k}$

$x_3 = \sqrt{8k}$

$\Rightarrow$ mögliche Extremstellen:

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -\sqrt{8k}$$
$$x_3 = \sqrt{8k}$$

(da $k > 0$ handelt es sich echt um 3 verschiedene Stellen)

(IV) $x = \sqrt{8k}$

$y = \frac{3}{8} k^3$

Umformen der 1. Gleichung:

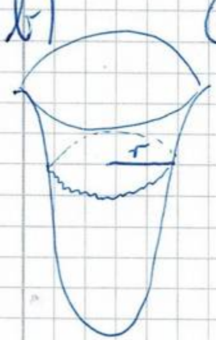
$$x = \sqrt{8k} \quad | \, ()^2$$
$$x^2 = 8k$$
$$\frac{1}{8} x^2 = k$$

Einsetzen in die 2. Gleichung:

$$y = \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{1}{8} x^2\right)^3 = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{512} x^6 = \frac{3}{4096} x^6$$

$$\Rightarrow o(x) = \frac{3}{4096} x^6$$

b)

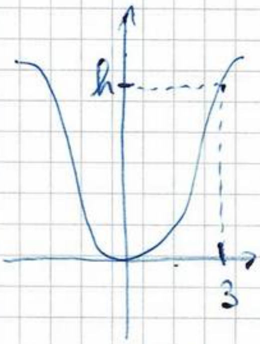


(I)

Umfang eines Kreises: $2\pi r$

$$18{,}85 = 2\pi r \quad | : 2\pi$$
$$3\,\text{cm} = r$$

Bestimmung der Höhe:



$f_3(3) = 6{,}17$

$\Rightarrow$ Höhe 6,17 cm

(II)

tangentiale Berührung im Punkt $P(4|9)$

$$f_3'(x) = -\frac{36}{512}x^3 + \frac{54}{32}x$$

$$f_3'(4) = 2{,}25$$

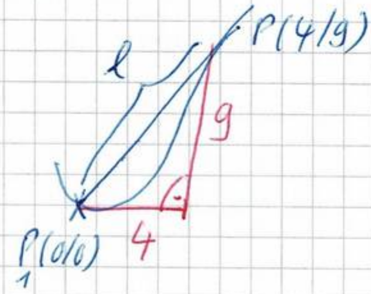
$\Rightarrow t(x) = 2{,}25x + b$

$P(4|9)$ auf $t \Rightarrow t(4) = 9$

$$2{,}25 \cdot 4 + b = 9$$
$$9 + b = 9$$
$$b = 0$$

$\Rightarrow t(x) = 2{,}25x$

(III) unterer Punkt: $P_1(0|0)$
(da es sich um eine Ursprungsgerade handelt)



$l^2 = 4^2 + 9^2$

$l^2 = 16 + 81$

$l^2 = 97$

$\underline{l \approx 9{,}85 \text{ cm}}$

(IV) Krümmung nach links $\Leftrightarrow f_3''(x) > 0$

$f_3''(x) = -\frac{108}{512}x^2 + \frac{54}{32}$

$f_3''(x) = 0 \Rightarrow -\frac{108}{512}x^2 + \frac{54}{32} = 0$

$-\frac{108}{512}x^2 = -\frac{54}{32} \quad | \cdot 512$

$-108x^2 = -864 \quad | : (-108)$

$x^2 = 8$

$x_1 = -\sqrt{8} \approx -2{,}83$

$x_2 = \sqrt{8} \approx 2{,}83$

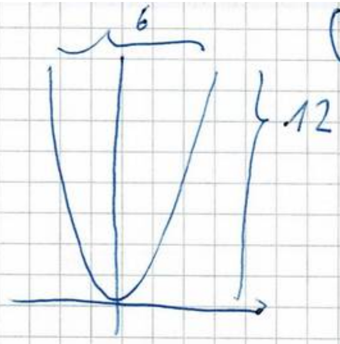
$f_3''(-3) = -0{,}21$ also $f_3''(x) < 0$ für $x < -2{,}83$

$f_3''(0) = 54/32$ " $f_3''(x) > 0$ für $-2{,}83 < x < 2{,}83$

$f_3''(3) = -0{,}21$ " $f_3''(x) < 0$ für $x > 2{,}83$

$\Rightarrow$ gesuchter Bereich: $-2{,}83 < x < 2{,}83$

c)

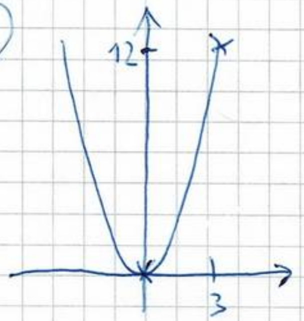


I

Zu den Angaben passt Graph I

Er erreicht eine Höhe von $y = 12$ und ganz oben eine Breite von 6

II



Scheitelpunkt $S(0/0)$

$\Rightarrow p(x) = ax^2$

$P(3|12)$ auf $p \Rightarrow p(3) = 12$

$$a \cdot 3^2 = 12$$
$$9a = 12$$
$$a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{4}{3}x^2$$

III

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3h}\right)^2 dh$$
$$= \pi \cdot \int_0^6 \frac{1}{4} \cdot 3h \; dh$$
$$= \pi \cdot \int_0^6 \frac{3}{4} h \, dh$$
$$= \pi \cdot \left[\frac{3}{8} h^2\right]_0^6$$
$$= \pi \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot 6^2 - 0\right)$$

$= 13{,}5\pi \approx 42{,}41\ cm^3$

IV

$$100 = \pi \cdot \int_0^a \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3h}\right)^2 dh$$

$$100 = \pi \cdot \left[\tfrac{3}{8}h^2\right]_0^a$$

$$100 = \pi \cdot \left(\tfrac{3}{8}a^2 - 0\right)$$

$$100 = \tfrac{3}{8}\pi a^2 \quad \Big| : \tfrac{3}{8}\pi$$

$$84{,}88 = a^2$$

$$9{,}21 \approx a$$

Der obere Glasrand ist auf 12 cm Höhe. Die Markierung ist $12 - 9{,}21 = 2{,}79$ cm darunter.

6a) $f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x - 5$

$f'(x) = 0{,}75x^2 - 6x + 9$

$f''(x) = 1{,}5x - 6$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0{,}75x^2 - 6x + 9 = 0$

GTR...

$x_1 = 2$

$x_2 = 6$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2) = -3 \Rightarrow HP$

$f''(6) = 3 \Rightarrow TP$

Koordinaten:

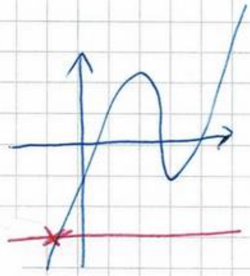
$f(2) = 3$

$f(6) = -5$

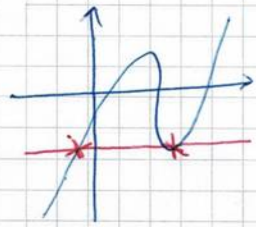
$\Rightarrow HP(2|3)$

$TP(6/-5)$

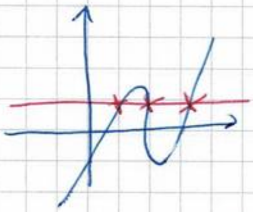
b) $c < -5$ eine Lösung



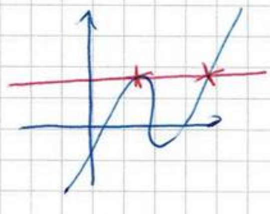
$c = -5$ 2 Lösungen



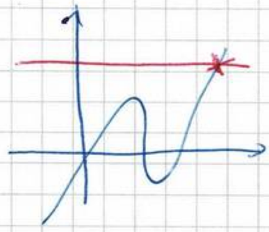
$-5 < c < 3$ 3 Lösungen



$3 = c$ 2 Lösungen



$3 < c$ eine Lösung



c) $g(x) = \frac{1}{4}(x+4)^3 - 3(x+4)^2 + 9(x+4) - 5 + 1$

d) g ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, da die Gleichung nur ungerade Exponenten enthält

Wenn der gesamte Graph um 4 Einheiten nach rechts und eine nach unten verschoben wird, so entsteht der Graph von f.
Das Symmetriezentrum verschiebt sich dann entsprechend von P(0|0) auf Q(4|-1)

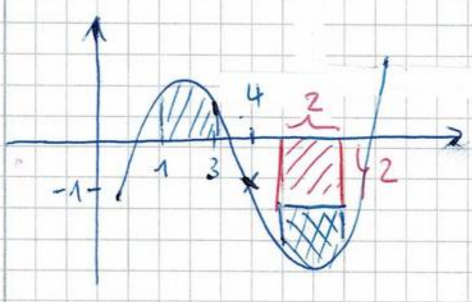
e) $$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^3 \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{16}x^4 - x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5x\right]_1^3$$

GTR

$= 5$

f) $$\int_5^7 f(x)\,dx = ?$$



Wegen der Symmetrie (siehe Aufgabenteil d) gilt $A_{///} = A_{\#}$

Oberhalb von $A_{\#}$ befindet sich noch ein rotes Rechteck mit den Maßen 2×2

Der untersuchte Flächeninhalt ist unter der x-Achse, das Integral daher negativ:

$$\int_5^7 f(x)\,dx = -\left(2 \cdot 2 + A_{\equiv}\right)$$

$$= -(4 + 5)$$

$$= -9$$

g) $f_a(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + ax - 5$

$f_a'(x) = 0{,}75x^2 - 6x + a$

$f_a''(x) = 1{,}5x - 6$

$f_a'''(x) = 1{,}5$

Notw. Bed.: $f_a''(x) = 0$

$1{,}5x - 6 = 0$

$1{,}5x = 6$

$x = 4$

Hinr. Bed.: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$

$f_a'''(4) = 1{,}5$

Y-Wert

$f_a(4) = 0{,}25 \cdot 4^3 - 3 \cdot 4^2 + 4a - 5$

$= 16 - 48 + 4a - 5$

$= -37 + 4a$

$\Rightarrow WP(4 / 4a-37)$

h) $f_a(x) = f_b(x) \qquad a \neq b$

$0{,}25x^3 - 3x^2 + ax - 5 = 0{,}25x^3 - 3x^2 + bx - 5 \quad | +5$

$0{,}25x^3 - 3x^2 + ax = 0{,}25x^3 - 3x^2 + bx \quad | -0{,}25x^3 \, | +3x^2$

$ax = bx$

$ax - bx = 0$

$x \underbrace{(a-b)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$f_a(0) = -5$

$\Rightarrow S(0 / -5)$

i) $f_a'(x) = 0{,}75x^2 - 6x + a$

Tangente parallel zur x-Achse $\Leftrightarrow f_a'(x) = 0$

$\frac{3}{4}x^2 - 6x + a = 0 \quad | \cdot \frac{4}{3}$

$x^2 - 8x + \frac{4}{3}a = 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16 - \frac{4}{3}a}$

Der Term hat dann keine Lösung, wenn $16 - \frac{4}{3}a < 0$:

$16 - \frac{4}{3}a = 0$

$16 = \frac{4}{3}a$

$12 = a$

Test:

$a = 10 \Rightarrow 16 - \frac{4}{3} \cdot 10 = 2{,}\overline{6}$

$a = 14 \Rightarrow 16 - \frac{4}{3} \cdot 14 = -2{,}\overline{6}$

$\Rightarrow$ Dies ist der Fall für $a > 12$