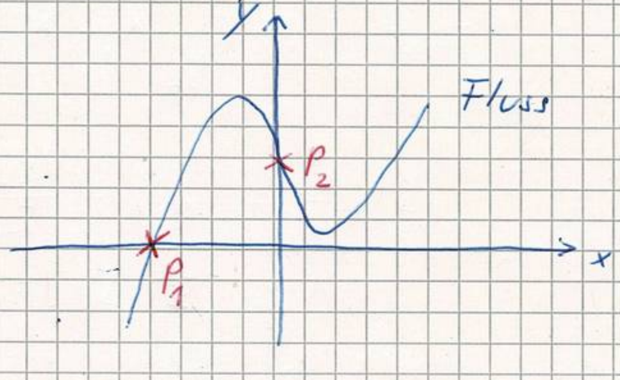
LÖSUNGEN
(Teil B: Teil mit Hilfsmitteln)

1a)



Achsenabschnitt:

$f(0) = 2$

$\Rightarrow P_2\ (0/2)$

Autobahn 2 überquert den Fluss im Punkt $P_2\ (0/2)$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

GTR...

$x = -4{,}37$

$\Rightarrow P_1\ (-4{,}37 / 0)$

Autobahn 1 überquert den Fluss im Punkt $P_1\ (-4{,}37/0)$

b) $f(x) = 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

$f'(x) = 3{,}6x^2 + 8x - 5$

$f''(x) = 7{,}2x + 8$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$3{,}6x^2 + 8x - 5 = 0$

GTR...

$x_1 = -2{,}73$

$x_2 = 0{,}51$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(-2{,}73) = -11{,}656$ HP

$f''(0{,}51) = 11{,}672$ TP

y-Werte und Ränder:

$f(-5) = -23$

$f(-2{,}73) = 21{,}05$

$f(0{,}51) = 0{,}65$

$f(2) = 17{,}6$

$\Rightarrow$ nördlichste Stelle $P_1(-2{,}73 / 21{,}05)$

südlichste Stelle $P_2(-5 / -23)$

c) Krümmung nach rechts $\Leftrightarrow f''(x) < 0$

$f''(x) = 7{,}2x + 8$

Nullstelle von f'':

$f''(x) = 0$

$7{,}2\,x + 8 = 0$

$7{,}2\,x = -8$

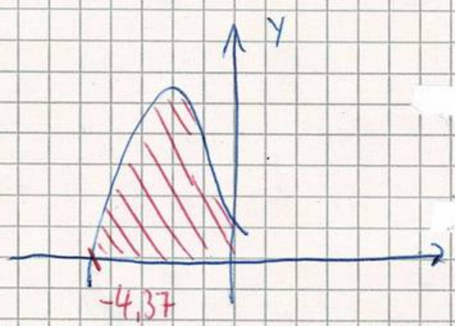
$x = -1{,}11$

$f''(-2) = -6{,}4$ (also f'' negativ links von $x = -1{,}11$)

$f''(0) = 8$ (also f'' positiv rechts von $x = -1{,}11$

$\Rightarrow$ Krümmung nach rechts für $-5 < x < -1{,}11$

d)



$$A = \int_{-4{,}37}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-4{,}37}^{0} 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\,dx$$

$$= \left[0{,}3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_{-4{,}37}^{0}$$

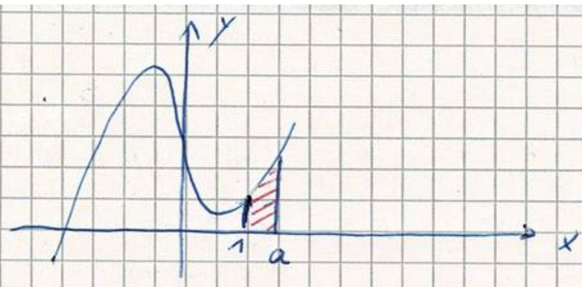
GTR...

$\approx 58{,}35$ FE

1 FE = 1 Hektar (100 m x 100 m)

$\Rightarrow A = 58{,}35$ ha

e)



$$A = \int_1^a 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\,dx$$

$$= \left[0{,}3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_1^a$$

$$= 0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \left(0{,}3 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 2\right)$$

$$= 0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \frac{17}{15}$$

$$0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \frac{17}{15} = 1$$

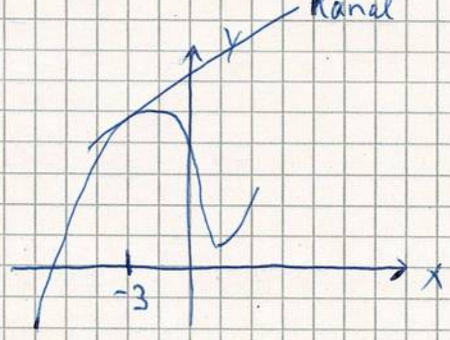
GTR...

$a_1 \approx -6{,}04$ (außerhalb Def. bereich)

$a_2 \approx 1{,}29$

$\Rightarrow a \approx 1{,}29$

f) 1



$f(-3) = 20{,}6 \Rightarrow A(-3/20{,}6)$

$f'(x) = 3{,}6x^2 + 8x - 5$

$f'(-3) = 3{,}4$

$\Rightarrow t(x) = 3{,}4x + b$

$A(-3/20{,}6)$ auf $t \Rightarrow t(-3) = 20{,}6$

$$3{,}4 \cdot (-3) + b = 20{,}6$$
$$-10{,}2 + b = 20{,}6$$
$$b = 30{,}8$$

$\Rightarrow t(x) = 3{,}4x + 30{,}8$

(II) Achsenabschnitt: 30,8

$\Rightarrow P(0/30{,}8)$

(III) Schnittpunkte:

$f(x) = t(x)$

$1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 3{,}4x + 30{,}8$

GTR...

$x_1 = -3$

$x_2 = 2{,}\overline{6} = \frac{8}{3}$

$$A = \int_{-3}^{8/3} t(x) - f(x)\,dx = \int_{-3}^{8/3} 3{,}4x + 30{,}8 - (1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{8/3} 3{,}4x + 30{,}8 - 1{,}2x^3 - 4x^2 + 5x - 2\,dx$$

$$= \int_{-3}^{8/3} -1{,}2x^3 - 4x^2 + 8{,}4x + 28{,}8 \, dx$$

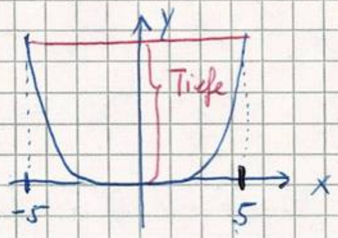
$$= \left[-0{,}3x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4{,}2x^2 + 28{,}8x\right]_{-3}^{8/3}$$

GTR...

$\approx 103{,}11$ FE

$= 103{,}11$ ha

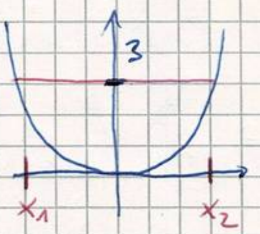
2a)



$f(5) = 5$

$\Rightarrow$ Tiefe 5 m

b)



$f(x) = 3$

$\frac{1}{125}x^4 = 3$

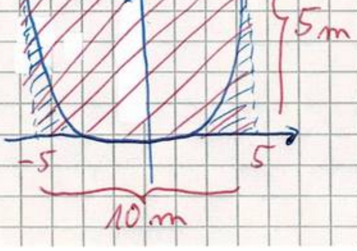
GTR...

$x_1 = -4{,}4$

$x_2 = 4{,}4$

$\Rightarrow$ Breite 8,8 m

c) Flächeninhalt der Querschnittsfläche:



$A_{/\!/} = 10 \cdot 5 = 50\,m^2$

$$A_{Querschnitt} = A_{///} - A_{///}$$

$$= 50 - \int_{-5}^{5} \frac{1}{125} x^4 \, dx$$

$$= 50 - \left[\frac{1}{625} x^5\right]_{-5}^{5}$$

GTR ...

$$= 50 - 10$$

$$= 40 \text{ m}^2$$

Volumen:

$$V = G \cdot h$$

$$= 40 \cdot 50$$

$$\underline{= 2000 \text{ m}^3}$$

d) $\tan \alpha = f'(x)$

$\tan 3° = f'(x)$

$0{,}0524 = f'(x)$

$f(x) = \frac{1}{125} x^4$

$f'(x) = \frac{4}{125} x^3$

$f'(x) = 0{,}0524$

$\frac{4}{125} x^3 = 0{,}0524$

GTR ...

$x \approx 1{,}18$

$f'(x) = -0{,}0524$

$\frac{4}{125} x^3 = -0{,}0524$

GTR ...

$x \approx -1{,}18$

$f'(-2) = -0{,}256 \qquad \alpha = \tan^{-1}(-0{,}256) = -14{,}36°$
$f'(0) = 0 \qquad \alpha = \tan^{-1}(0) = 0°$
$f'(2) = 0{,}256 \qquad \alpha = \tan^{-1}(0{,}256) = 14{,}36°$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Bereich ist $-1{,}18 < x < 1{,}18$

e) $f(4) = 2{,}048 \Rightarrow P_1(-4/2{,}048)$
$f(-4) = 2{,}048 \Rightarrow P_2(4/2{,}048)$

Der Verlauf der Stützen wird von den Normalen an f durch P_1 bzw. P_2 beschrieben

Wir bestimmen die Normale an f durch P_2:

$f(x) = \frac{1}{125}x^4$

$f'(x) = \frac{4}{125}x^4$

$f'(4) = 2{,}048$

$n(x) = mx + b$ — Steigung der Tangente mal Steigung der Normale gleich -1

$m \cdot 2{,}048 = -1$
$m \approx -0{,}4883$

$\Rightarrow n(x) = -0{,}4883x + b$

$P_2(4/2{,}048)$ auf $n \Rightarrow n(4) = 2{,}048$
$-0{,}4883 \cdot 4 + b = 2{,}048$
$-1{,}9532 + b = 2{,}048$
$b = 4{,}0012 \approx 4$

$\Rightarrow n(x) = -0{,}4883x + 4$

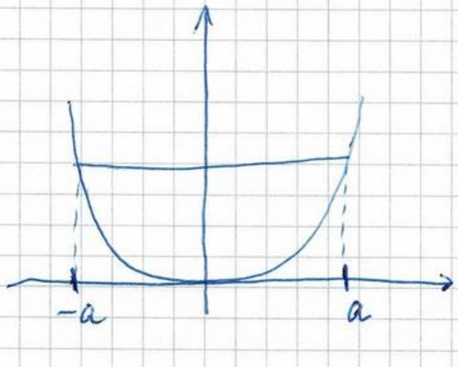
Ende der Stütze auf dem Boden:
Nullstelle von n

$$-0{,}4883x + 4 = 0$$
$$-0{,}4883x = -4$$
$$x \approx 8{,}19$$

Da f symmetrisch zur y-Achse ist, sind auch die beiden Stützen symmetrisch zur y-Achse
$\Rightarrow$ Die andere Stütze endet bei $x = -8{,}19$

$\Rightarrow$ gesuchter Abstand $= 2 \cdot 8{,}19 = \underline{16{,}38\,m}$

f) Wir betrachten den unteren Teilraum:

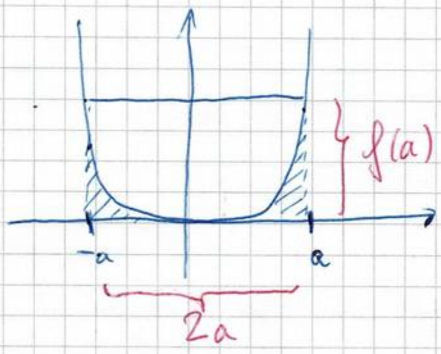


$$V_{\text{unterer Teilraum}} = G \cdot h = G \cdot 50\,m$$

$\Rightarrow 500 = G \cdot 50$
$10\,cm^2 = G$

Die untere Querschnittsfläche muss 10 m² groß sein.

D. h.:



$$10 = A_{\text{Querschnitt}} = A_{\text{Rechteck}} - \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2a \cdot f(a) - \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2a \cdot \frac{1}{125} a^4 - \int_{-a}^{a} \frac{1}{125} x^4\,dx$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \left[\frac{1}{625} x^5\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \left(\frac{1}{625} a^5 - \frac{1}{625} \cdot (-a)^5\right)$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \left(\frac{1}{625} a^5 + \frac{1}{625} a^5\right)$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \frac{2}{625} a^5$$

$$= \frac{8}{625} a^5$$

$$\Rightarrow \frac{8}{625} a^5 = 10$$

GTR ...

$a \approx 3{,}79$

$\Rightarrow$ Breite $= 2 \cdot 3{,}79 = \underline{7{,}58\,m}$

3a) $f(x) = 0{,}2\,x^3 + 5x^2 - 8x + 18$

$f'(x) = 0{,}6\,x^2 + 10x - 8 \qquad f''(x) = 1{,}2\,x + 10$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$0{,}6\,x^2 + 10x - 8 = 0$

GTR:

$x_1 = -17{,}43$ (außerhalb Def. bereich)

$x_2 = 0{,}76$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0{,}76) = 1{,}2 \cdot 0{,}76 + 10 = 10{,}912$

$\Rightarrow$ TP

y-Werte und Ränder:

$f(-2) = 52{,}4$

$f(0{,}76) = 14{,}90$

$f(5) = 128$

$\Rightarrow$ höchste Geschwindigkeit 15 Uhr mit 128.000 km/h

niedrigste ca. 10:46 Uhr mit 14.900 km/h

b) gesucht: Maximum der Ableitung

$f'(x) = 0{,}6\,x^2 + 10x - 8$

$f''(x) = 1{,}2x + 10$

$f'''(x) = 1{,}2$

Notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$1{,}2x + 10 = 0$

$1{,}2x = -10$

$x = -8{,}\overline{3}$ (außerhalb Def. bereich)

Ränder:

$f'(-2) = -25{,}6$

$f'(5) = 57$

$\Rightarrow$ stärkste Beschleunigung um 15 Uhr

c) $\text{Weg} = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx$

$= \int_{-2}^{5} 0{,}2x^3 + 5x^2 - 8x + 18\,dx$

$= \left[0{,}05\,x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 18x\right]_{-2}^{5}$

GTR...

$= 294{,}1166$

$\Rightarrow 294.116{,}6$ km

d)

$F(x) = 0{,}05\,x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 18x + c$

$8\text{ Uhr} \,\hat{=}\, x = -2$

$F(-2) = 12$

$F(-2) = 0{,}05 \cdot (-2)^4 + \frac{5}{3} \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2)^2 + 18 \cdot (-2) + c$

$12 = 0{,}8 - 13{,}\overline{3} - 16 - 36 + c$

$12 = -64{,}5\overline{3} + c$

$76{,}5\overline{3} = c$

$\Rightarrow h(x) = 0{,}05\,x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 4x^2 + 18x + 76{,}5\overline{3}$