# LÖSUNGEN

## (Teil A: Hilfsmittelfreier Teil)

1a) $\int_2^3 2x+3\,dx = \left[x^2+3x\right]_2^3 = 3^2+3\cdot 3-(2^2+3\cdot 2)$

$= 9+9-(4+6) = 18-10 = 8$

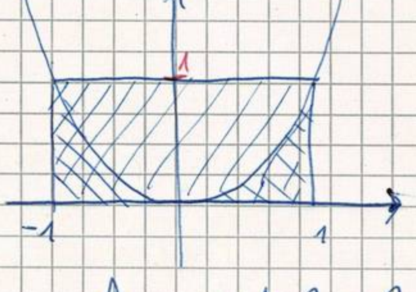
b) $\int_1^4 6x^2+2x\,dx = \left[2x^3+x^2\right]_1^4 = 2\cdot 4^3+4^2-(2\cdot 1^3+1^2)$

$= 128+16-(2+1) = 144-3 = 141$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2$

$= -\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$

2)




$f(1) = 1$

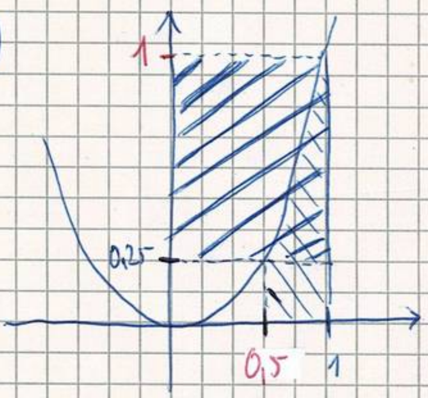
$f(-1) = 1$

$A_{///} = 1\cdot 2 = 2$ FE

$A_{\backslash\backslash\backslash} = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ FE

$$A_{gesucht} = A_{///} - A_{\backslash\backslash\backslash}$$
$$= 2 - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{4}{3} \text{ FE}$$

b)

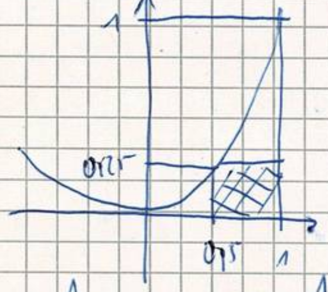



$f(1) = 1$

$f(x) = 0{,}25$
$x^2 = 0{,}25$
$x = \pm 0{,}5$
(hier: $x = 0{,}5$)

$$A_{///} = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \text{ FE}$$

$$A_{\backslash\backslash\backslash} = \int_{0{,}5}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ FE}$$




$$A_{\#} = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ FE}$$

$$A_{gesucht} = A_{///} - A_{\backslash\backslash\backslash} + A_{\#} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{6}{8} - \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \text{ FE}$$

c) Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 = 2x$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x\,(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

$$A = \int_0^2 g(x) - f(x)\,dx = \int_0^2 2x - x^2\,dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2^2 - \frac{1}{3}\cdot 2^3 - 0$$

$$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{12}{3} - \frac{8}{3} = \underline{\frac{4}{3}\ FE}$$

3) $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$$f(x) = f'(x)$$
$$x^3 = 3x^2$$
$$x^3 - 3x^2 = 0$$
$$x^2 \cdot (x-3) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3$$

4a) C (0/10/0)

x-Wert wie D
y-Wert wie B
z-Wert wie B

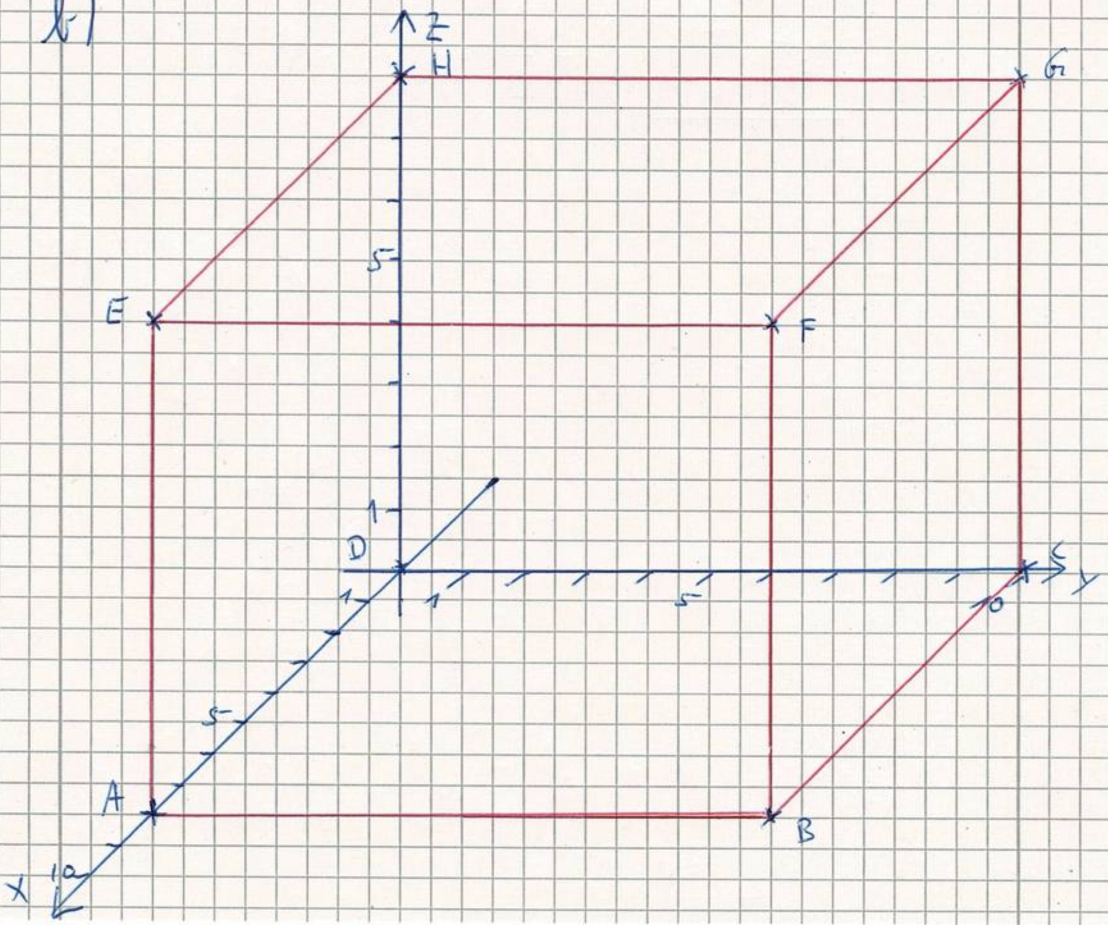
E (8/0/8)

x-Wert wie A
y-Wert wie A
z-Wert wie H

G (0/10/8)

x-Wert wie D
y-Wert wie B
z-Wert wie H

b)



c) Kantenlängen: $AB = 10$ LE

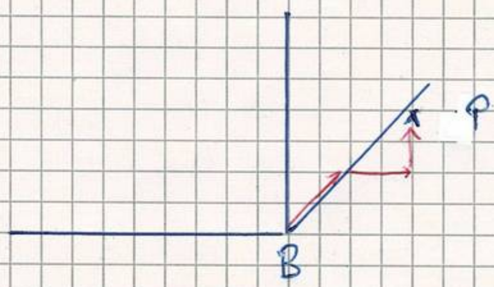
$AD = 8$ LE

$AE = 8$ LE

$V = 10 \cdot 8 \cdot 8 = 640\ LE^3 = 640$ VE

(Volumeneinheiten)

d) Der Punkt befindet sich außerhalb des Quaders




5a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

b) von A nach C:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

vom D nach B:

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

6)

$$\int_1^a 3x^2 \, dx = 26$$

$$\left[x^3\right]_1^a = 26$$

$$a^3 - 1^3 = 26$$

$$a^3 - 1 = 26$$

$$a^3 = 27$$

$$\underline{a = 3}$$

7)

$$V = \pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 (\sqrt{x})^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 x \, dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^2$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 - 0\right)$$

$$= \pi \cdot 2$$

$$\underline{= 2\pi}$$

8a)

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 -x^3 + 12x\,dx$$

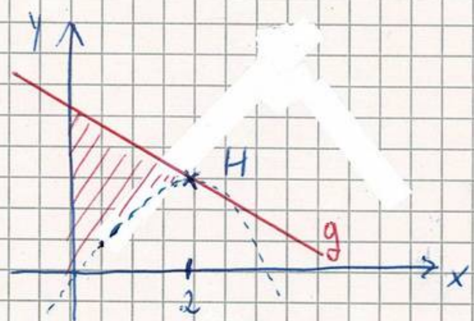
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_0^2$$

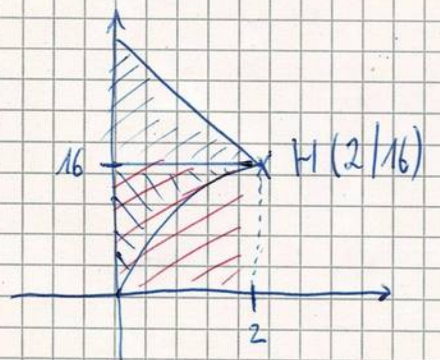
$$= -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 - 0$$

$$= -4 + 24$$

$$= 20 \checkmark$$

b)




$$A_{///} = 2\cdot 16 = 32$$

$$A_{\backslash\backslash\backslash} = A_{///} - \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= 32 - 20$$

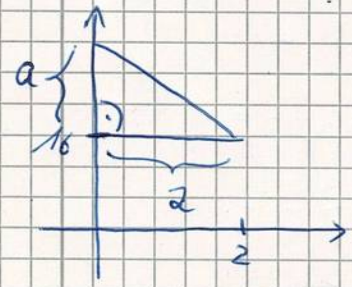
$$= 12$$

Es gilt: $A_{///} + A_{\backslash\backslash\backslash} = 20$

(laut Aufgabenstellung:
Fläche zwischen g, f und y-Achse gleich
20 FE)

$$\Rightarrow A_{III} = 20 - A_{IIII}$$
$$= 20 - 12$$
$$= 8 \text{ FE}$$

Es gilt aber auch:



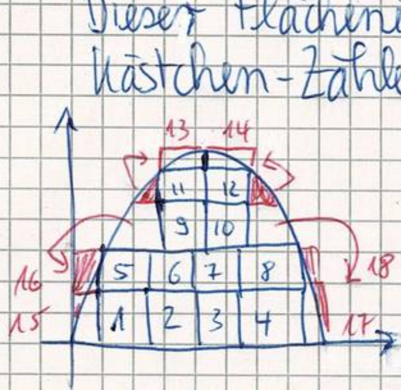

$$A_{III} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a$$
$$8 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot a$$
$$8 = a$$

Der Achsenabschnitt muss 8 LE über der Markierung 16 liegen
$\Rightarrow$ bei 24

9a) Das Volumen der in den ersten 3 h zufließenden Flüssigkeit entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse von $x=0$ bis $x=3$

$$V = \int_0^3 f(x)\,dx$$

Dieser Flächeninhalt lässt sich durch Kästchen-Zählen abschätzen:




Ergebnis: etwa 18 Kästchen

1 Kästchen $\hat{=}$ $1\ \frac{m^3}{h}$ auf 0,5 h

$\hat{=}$ $0{,}5\ m^3$

$\Rightarrow$ ca. $9\ m^3$

(Information: Laut Musterlösung von Hamburg soll ein Wert zwischen 7 und $10\ m^3$ herauskommen)

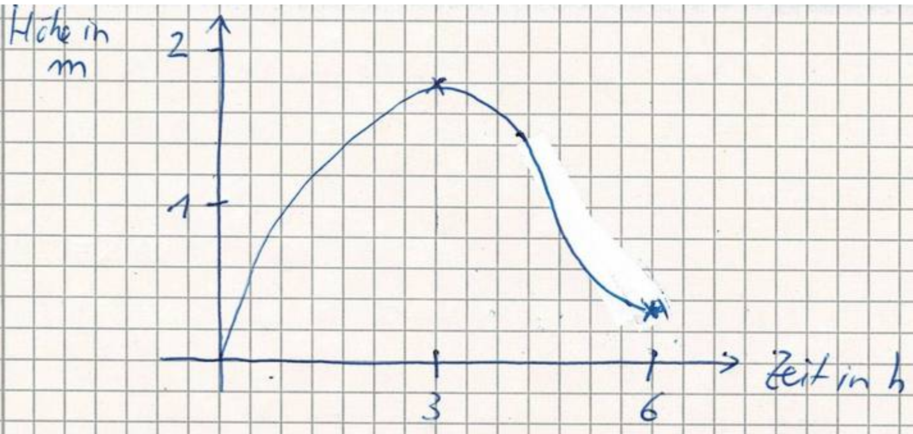
b) Der Hochpunkt wird bei $x = 3$ erreicht. Bis dann sind $9\ m^3$ hinzu gekommen. Das macht bei einer Grundfläche von $5\ m^2$ in einem quaderförmigen Becken 1,8 m Höhe

$$G \cdot h = V$$
$$5\,m^2 \cdot h = 9\,m^3$$
$$h = 1{,}8\ m$$

Da das Becken am Anfang leer ist, geht der Graph durch P(0/0) und erreicht sein Maximum bei Q(3/1,8).

Ab $x = 3$ fließt die Flüssigkeit wieder heraus. Die Fläche rechts ist aber kleiner als die links. Es fließt also nicht alles ab.

Bei $x = 6$ liegt möglicherweise ein Minimum (die Abflussrate ist 0)




10a) Schnittpunkte:

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3 \quad | -1$$

$$-\frac{1}{x^2} = -4 \quad | \cdot (-x^2)$$

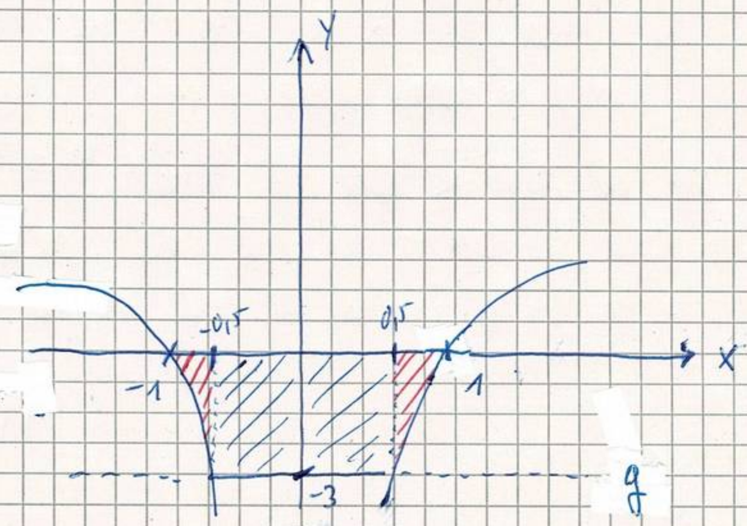
$$1 = 4x^2 \quad | :4$$

$$\frac{1}{4} = x^2$$

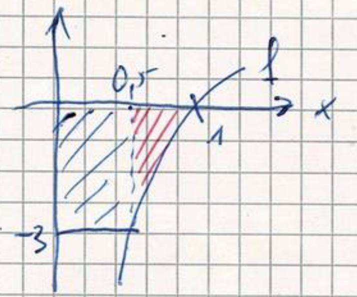
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

b)



Da der Graph symmetrisch ist besteht die zu bestimmende Fläche aus 2 gleich großen zueinander symmetrischen Teilen. Es reicht eine der Hälften (z.B. $x>0$) auszurechnen




$$A_{///} = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \text{ FE}$$

$$-A_{///} = \int_{0,5}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0,5}^{1} 1 - \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} 1 - x^{-2}\,dx = \left[1x + x^{-1}\right]_{1/2}^{1} = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1/2}\right) = 2 - (0{,}5 + 2) = 2 - 2{,}5$$

$$= -0{,}5$$

$$\Rightarrow A_{///} = 0{,}5 \text{ FE}$$

$$\Rightarrow A_{gesucht} = 2 \cdot (A_{///} + A_{///}) = 2 \cdot (1{,}5 + 0{,}5)$$

$$\underline{= 4 \text{ FE}}$$

11a) f wächst bis $x \approx -2$, fällt dann bis $x \approx 2$ und wächst dann wieder

$\Rightarrow$ $f'$ muss positiv sein bis $x \approx -2$, negativ von ca. $-2$ bis $x \approx 2$ und dann wieder positiv

⇒ Graph II kommt nicht in Frage
(negativ von ca. −3 bis ca. 3)

f verläuft um $x=0$ herum mit
relativ konstanter Steigung
Der Graph verläuft mehr oder weniger
von $P_1(0|0)$ nach $P_2(1|-1)$
⇒ Steigung −1

⇒ Graph III kommt nicht in Frage
(bei $x=0$ Steigung ca. −2, nicht −1)

b) f ist im gesamten Bereich $1 \leq x \leq 3$
negativ

⇒ F muss im gesamten Bereich
streng monoton fallend sein

12a) $f_k(x) = -k \cdot (x^4 - 4x^3)$
$= -kx^4 + 4kx^3$

$f_k'(x) = -4kx^3 + 12kx^2$

Notw. Bed.: $f_k'(x) = 0$

$-4kx^3 + 12kx^2 = 0$

$x^2 \cdot (-4kx + 12k) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad -4kx = -12k \qquad |k \neq 0$

$x = 3$

Hinr. Bed.: $f_k'(x) = 0$ und $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = -12kx^2 + 24kx$$

$f_k''(0) = 0$ (keine Aussage möglich)

$$\begin{aligned} f_k''(3) &= -12k \cdot 9 + 24k \cdot 3 \\ &= -108k + 72k \\ &= -36k < 0 \quad \text{(da } k>0\text{)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei $x=3$

$f_k'(-1) = 4k + 12k = 16k > 0$

$f_k'(1) = -4k + 12k = 8k > 0$

$\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$\Rightarrow$ x-Koordinate: 3

b)

$$\int_0^4 f_k(x) - f_{k+1}(x) \, dx$$

$$= \int_0^4 -kx^4 + 4kx^3 - \left(-(k+1)x^4 + 4(k+1)x^3\right) dx$$

$$= \int_0^4 -kx^4 + 4kx^3 - \left(-kx^4 - x^4 + 4kx^3 + 4x^3\right) dx$$

$$= \int_0^4 \cancel{-kx^4} + \cancel{4kx^3} + \cancel{kx^4} + x^4 - \cancel{4kx^3} - 4x^3 \, dx$$

$$= \int_0^4 x^4 - 4x^3 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - x^4\right]_0^4 = \frac{1}{5} \cdot 4^5 - 4^4$$

$$= \frac{1024}{5} - 256 = -51{,}2$$

$\Rightarrow A = 51{,}2$ FE

$\Rightarrow$ Das Ergebnis ist unabh. von k stets 51,2 FE

13a)

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 3 \cdot \left[\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}9\\3\\9\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}11\\4\\12\end{pmatrix}$$

b) $$3 \cdot \begin{pmatrix}5\\2\\2\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}15\\10\\10\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\8\\2\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}17\\18\\12\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}13\\16\\9\end{pmatrix}$$