LÖSUNGEN
(Teil B: Teil mit Hilfsmitteln)

1a) $f(x) = 0$

$2x^3 + 3x^2 - 6x = 0$

GTR...

$x_1 \approx -2{,}64$

$x_2 = 0$

$x_3 \approx 1{,}14$

b) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 6$

c) Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$6x^2 + 6x - 6 = 0$

GTR...

$x_1 = -1{,}62$

$x_2 = 0{,}62$

Hinr. Bed.:

$f'(-2) = 6$

$f'(0) = -6$

$f'(1) = 6$

y-Werte

$f(-1{,}62) \approx 9{,}09$

$f(0{,}62) \approx -2{,}09$

$\Rightarrow$ HP $(-1{,}62 / 9{,}09)$

TP $(0{,}62 / -2{,}09)$

d) Nullstellen von f' (siehe Aufgabe c):

$x_1 \approx -1{,}62$
$x_2 \approx 0{,}62$

$f'(-2) = 6$
$f'(0) = -6$
$f'(1) = 6$

$\Rightarrow$ streng monoton wachsend für $-\infty < x < -1{,}62$
streng monoton fallend für $-1{,}62 < x < 0{,}62$
streng monoton wachsend für $0{,}62 < x < \infty$

e) $f(1) = -1 \Rightarrow A(1|-1)$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6x$
$f'(x) = 6x^2 + 6x - 6$
$f'(1) = 6$

Tangente: $t(x) = mx + b$
$m = f'(1) = 6$

$\Rightarrow t(x) = 6x + b$

$A(1|-1)$ auf $t \Rightarrow t(1) = -1$
$6 \cdot 1 + b = -1$
$6 + b = -1 \quad |-6$
$b = -7$

$\Rightarrow t(x) = 6x - 7$

f) ① Wenn B(3|63) auf f liegt, so muss gelten $f(3) = 63$

$f(3) = 2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 = 63$ ✓

② Die momentane Steigung an einer Stelle ist der Wert der Ableitung an dieser Stelle

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 6$
$f'(3) = 6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 6 = 66$
$\Rightarrow$ Die momentane Steigung ist 66

③ $f(1) = -1 \Rightarrow A(1|-1)$

B(3|63)

mittlere Steigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{63 - (-1)}{3 - 1} = \frac{64}{2} = 32$

Die mittlere Steigung ist 32.

g) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h) Die Funktionsgleichung hat gerade und ungerade Exponenten. Daher liegt keine Standardsymmetrie vor.

2) Differential: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

hier:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{6x^2 - 6x_0^2}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} 6 \cdot \frac{(x^2 - x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} 6 \cdot \frac{\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{(x - x_0)}}$$

$$= \lim_{x \to x_0} 6 (x + x_0)$$

$$= 6 (x_0 + x_0)$$

$$= 6 \cdot 2x_0$$

$$= 12 x_0$$

$\Rightarrow f'(x) = 12x$

3a) $f(x) = 0$

$x^4 - 10x^2 + 8 = 0$

GTR ...

$x_1 \approx -3{,}02$ $\quad$ $x_3 \approx 0{,}94$

$x_2 \approx -0{,}94$ $\quad$ $x_4 \approx 3{,}02$

b) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 8$
$f'(x) = 4x^3 - 20x$

$f'(x) = 0$
$4x^3 - 20x = 0$
GTR ...
$x_1 \approx -2{,}24$
$x_2 = 0$
$x_3 \approx 2{,}24$

$f'(-3) = -48$
$f'(-1) = 16$
$f'(1) = -16$
$f'(3) = 48$

$\Rightarrow$ streng monoton fallend für $-\infty < x < -2{,}24$
streng monoton wachsend für $-2{,}24 < x < 0$
streng monoton fallend für $0 < x < 2{,}24$
streng monoton wachsend für $2{,}24 < x < \infty$

c) ① $a = f(1) = -1$

② $10 = f(b)$
$10 = b^4 - 10b^2 + 8 \quad | -10$
$0 = b^4 - 10b^2 - 2$
GTR ...
$b_1 \approx -3{,}19$
$b_2 \approx 3{,}19$

d) $f'(x) = 4x^3 - 20x$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

f) Die Funktionsgleichung hat nur gerade Exponenten.
Deshalb ist der Graph symmetrisch zur y-Achse.

Der Graph zeigt keine Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung, da es ansonsten nur ungerade Exponenten in der Gleichung geben würde.

g) $f(4) = 104 \Rightarrow C\,(4/104)$

$f(x) = x^4 - 10x^2 + 8$
$f'(x) = 4x^3 - 20x$
$f'(4) = 176$

Tangente: $t(x) = mx + b$

$m = f'(4) = 176$

$\Rightarrow t(x) = 176x + b$

$C\,(4/104)$ auf $t \Rightarrow t(4) = 104$
$176 \cdot 4 + b = 104$
$704 + b = 104$
$b = -600$

$\Rightarrow t(x) = 176x - 600$

4a) $f(x) = 0$

$x^3 + 3x^2 - 9x + 2 = 0$

GTR...

$x_1 \approx -4{,}91$

$x_2 \approx 0{,}24$

$x_3 \approx 1{,}67$

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$

c) Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$3x^2 + 6x - 9 = 0$

GTR...

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

Hinr. Bed.:

$f'(-4) = 15$

$f'(0) = -9$

$f'(2) = 15$

y-Werte

$f(-3) = 29$

$f(1) = -3$

$\Rightarrow$ HP $(-3/29)$

TP $(1/-3)$

d) A ist der Schnittpunkt von f und t

⇒ Wir suchen die Schnittpunkte von f und t

$f(x) = t(x)$

$x^3 + 3x^2 - 9x + 2 = 24{,}75x - 48$

$x^3 + 3x^2 - 33{,}75x + 50 = 0$

GTR...

$x_1 = -8$

$x_2 = 2{,}5$

Wir haben 2 Werte. Nur einer davon ist richtig.
Die Tangente muss in Punkt A dieselbe Steigung haben wie f

Steigung der Tangente: 24,75

Steigung von f : $f'(-8) = 135$ ↯
$f'(2{,}5) = 24{,}75$ ✓

y-Wert: $f(2{,}5) = 13{,}875$

⇒ $A(2{,}5 / 13{,}875)$

e) $B(2/4)$
$C(8/634)$

f) Die momentane Steigung an einer Stelle entspricht der Ableitung an dieser Stelle

$f'(x) = 96$

$3x^2 + 6x - 9 = 96$

$3x^2 + 6x - 105 = 0$

GTR...

$x_1 = -7$

$x_2 = 5$

y-Werte: $f(-7) = -131$

$f(5) = 157$

$\Rightarrow D_1 \ (-7/-131)$

$D_2 \ (5/157)$

5) Differential: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

hier: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{3x^2 - 3x_0^2}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{3(x^2 - x_0^2)}{x - x_0}$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \frac{3\cancel{(x - x_0)}(x + x_0)}{\cancel{(x - x_0)}}$

$$= \lim_{x \to x_0} 3(x + x_0)$$

$$= 3(x_0 + x_0)$$

$$= 3 \cdot 2x_0$$

$$= 6x_0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x$$

6a) $f(x) = 0$

$x^3 - 15x^2 + 72x = 0$

GTR...

$x = 0$

b) $f'(x) = 3x^2 - 30x + 72$

c) Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 30x + 72 = 0$

GTR...

$x_1 = 4$

$x_2 = 6$

Hinr. Bed.:

$f'(0) = 72$

$f'(5) = -3$

$f'(7) = 9$

y-Werte

$f(4) = 112$

$f(6) = 108$

$\Rightarrow$ HP$(4/112)$

TP$(6/108)$

d)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

e) $f(1) = 58 \Rightarrow A(1/58)$

$f(x) = x^3 - 15x^2 + 72x$
$f'(x) = 3x^2 - 30x + 72$
$f'(1) = 45$

Tangente: $t(x) = mx + b$
$m = f'(1) = 45$

$\Rightarrow t(x) = 45x + b$

$A(1/58)$ auf $t \Rightarrow t(1) = 58$
$45 \cdot 1 + b = 58$
$45 + b = 58$
$b = 13$

$\Rightarrow t(x) = 45x + 13$

f) $f(1) = 58 \Rightarrow A(1/58)$
$f(2) = 92 \Rightarrow B(2/92)$

$$m = \frac{92-58}{2-1} = 34$$

Die mittlere Steigung ist 34.

7) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$

Es gilt $f(0) = 2 \Rightarrow P(0|2)$ muss auf dem Graphen liegen.

Das ist bei Graph 2 nicht der Fall. Graph 2 kann es nicht sein.

Es gilt $f(2) = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 = 22$

$\Rightarrow Q(2|22)$ muss auf dem Graphen liegen

Das ist bei Graph 3 nicht der Fall. Graph 3 kann es nicht sein.

$\Rightarrow$ Es muss Graph 1 sein