LÖSUNGEN

(Teil A: Hilfsmittelfreier Teil)

1a) $2x+6=0$

$2x=-6$

$x=-3$ Nullstelle: $x=-3$

b) $x^2+2x-8=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+8}$

$x=-1\pm\sqrt{9}$

$x=-1\pm 3$

$x_1=-4$

$x_2=2$ Nullstellen: $x_1=-4$, $x_2=2$

c) $2x^2-8x-24=0 \quad |:2$

$x^2-4x-12=0$

$x=2\pm\sqrt{4+12}$

$x=2\pm\sqrt{16}$

$x=2\pm 4$

$x_1=-2$

$x_2=6$ Nullstellen $x_1=-2$, $x_2=6$

d) $x^2+4x=0$

$x\cdot(x+4)=0$

$x=0$ oder $x+4=0$

$x_1=0$ $\qquad x_2=-4$ Nullstellen $x_1=0$, $x_2=-4$

e) $x^3+4x^2=0$

$x^2\cdot(x+4)=0$

$x^2=0$ oder $x+4=0$ $\Big\}$ $x_1=0$, $x_2=-4$ Nullstellen $x_1=0$, $x_2=-4$

f) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ | Substitution $x^2 = z$

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = 5 \pm \sqrt{25-9}$

$z = 5 \pm \sqrt{16}$

$z = 5 \pm 4$

$z_1 = 9$ $\quad$ $z_2 = 1$ | Resubstitution $z = x^2$

$x^2 = 9$ $\quad$ $x^2 = 1$

$x_1 = 3$ $\quad$ $x_3 = 1$

$x_2 = -3$ $\quad$ $x_4 = -1$

Nullstellen $x_1 = 3$
$x_2 = -3$
$x_3 = 1$
$x_4 = -1$

g) $(x^2 - 9) \cdot (x + 4) \cdot (x^2 + 5) = 0$

$x^2 - 9 = 0$ oder $x + 4 = 0$ oder $x^2 + 5 = 0$

$x^2 = 9$ $\quad$ $x_3 = -4$ $\quad$ $x^2 = -5$

$x_1 = 3$ $\quad$ $\lightning$

$x_2 = -3$

Nullstellen: $x_1 = 3$
$x_2 = -3$
$x_3 = -4$

h) $x^5 - 8x^3 + 16x = 0$

$x \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) = 0$

$x = 0$ oder $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ | Substitution $x^2 = z$

$x_1 = 0$ $\quad$ $z^2 - 8z + 16 = 0$

$z = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$z = 4$ | Resubstitution $z = x^2$

$x^2 = 4$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

Nullstellen $x_1 = 0$
$x_2 = 2$
$x_3 = -2$

i) $x^3 - 6x^2 - 16x = 0$

$x \cdot (x^2 - 6x - 16) = 0$

$x = 0$ oder $x^2 - 6x - 16 = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad x = 3 \pm \sqrt{9+16}$

$x = 3 \pm \sqrt{25}$

$x = 3 \pm 5$

$x_2 = 8$

$x_3 = -2$

Nullstellen: $x_1 = 0$
$x_2 = 8$
$x_3 = -2$

j) $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$

$\frac{1}{3}x^2 = 3 \quad | \cdot 3$

$x^2 = 9$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

Nullstellen $x_1 = 3$
$x_2 = -3$

k) $x^3 - 27 = 0$

$x^3 = 27$

$x = 3$

Nullstelle: $x = 3$

l) $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad x = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x_2 = 1$

Nullstellen $x_1 = 0$
$x_2 = 1$

2) Graph 1 kann nicht zu f gehören, da er achsensymmetrisch ist. Die Funktion f hat aber gerade und ungerade Exponenten, kann also nicht achsensymmetrisch sein.
Außerdem gilt für f: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Beim Graphen 1 gilt allerdings $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$.

Graph 3 kann auch nicht zu f gehören.
Für f gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.
Bei Graph 3 ist aber $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$.

Graph 2 kann auch nicht zu f gehören.
Es gilt $f(0) = 0^3 + 2 \cdot 0 + 1 = 1$.
Aber Graph 2 verläuft durch den Koordinatenursprung.

3a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

4) $f(x) = x^3 + x$

5a) $f'(x) = 30x^4 - 15x^2 + 3$

b) $f'(x) = -96x^7 + 6x^2$

c) $f'(x) = 10x + 6$

d) $f'(x) = 6$

e) $f'(x) = 0$

6a) $f(x) = x^2 - 8x$

$f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0$

$2x - 8 = 0$

$2x = 8$

$x = 4$

$f'(0) = -8$

$f'(5) = 2 \cdot 5 - 8 = 10 - 8 = 2$

$\Rightarrow$ streng monoton fallend für $-\infty < x < 4$

streng monoton wachsend für $4 < x < \infty$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$
$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$

$f'(x) = 0$
$3x^2 + 6x - 24 = 0 \quad |:3$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$x = -1 \pm \sqrt{1+8}$
$x = -1 \pm \sqrt{9}$
$x = -1 \pm 3$
$x_1 = -4$
$x_2 = 2$

$f'(-5) = 3\cdot(-5)^2 + 6\cdot(-5) - 24 = 3\cdot 25 - 30 - 24 = 75 - 30 - 24 = 21$
$f'(0) = -24$
$f'(3) = 3\cdot 3^2 + 6\cdot 3 - 24 = 27 + 18 - 24 = 21$

$\Rightarrow$ streng monoton wachsend für $-\infty < x < -4$
streng monoton fallend für $-4 < x < 2$
streng monoton wachsend für $2 < x < \infty$

c) $f(x) = x^4 - 20x^2 + 64$
$f'(x) = 4x^3 - 40x$

$f'(x) = 0$
$4x^3 - 40x = 0$
$x \cdot (4x^2 - 40) = 0$
$x = 0$ oder $4x^2 - 40 = 0$
$x_1 = 0 \qquad 4x^2 = 40 \quad |:4$
$x^2 = 10$
$x_2 = \sqrt{10}$
$x_3 = -\sqrt{10}$

$f'(-5) = 4 \cdot (-5)^3 - 40 \cdot (-5) = -500 + 200 = -300$
$f'(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 40 \cdot (-1) = -4 + 40 = 36$
$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 40 \cdot 1 = 4 - 40 = -36$
$f'(5) = 4 \cdot 5^3 - 40 \cdot 5 = 500 - 200 = 300$

$\Rightarrow$ streng monoton fallend für $-\infty < x < -\sqrt{10}$
streng monoton wachsend für $-\sqrt{10} < x < 0$
streng monoton fallend für $0 < x < \sqrt{10}$
streng monoton wachsend für $\sqrt{10} < x < \infty$

d) $f(x) = x^5 - 6$
$f'(x) = 5x^4$

$f'(x) = 0$
$5x^4 = 0$
$x = 0$

$f'(-1) = 5 \cdot (-1)^4 = 5$
$f'(1) = 5 \cdot 1^4 = 5$

$\Rightarrow$ streng monoton wachsend für $-\infty < x < 0$
streng monoton wachsend für $0 < x < \infty$

7a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 4$
$f'(x) = 4x - 4$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$4x - 4 = 0$
$4x = 4$
$x = 1$

Hinreichende Bed.:

$f'(0) = -4$

$f'(2) = 4 \cdot 2 - 4 = 4$

y-Wert: $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 2$

$\Rightarrow$ TP $(1/2)$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$3x^2 + 6x - 45 = 0 \quad | :3$

$x^2 + 2x - 15 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1 + 15}$

$x = -1 \pm \sqrt{16}$

$x = -1 \pm 4$

$x_1 = -5$

$x_2 = 3$

Hinr. Bed.:

$f'(-6) = 3 \cdot (-6)^2 + 6 \cdot (-6) - 45 = 108 - 36 - 45 = 27$

$f'(0) = -45$

$f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - 45 = 48 + 24 - 45 = 27$

y-Werte: $f(-5) = (-5)^3 + 3 \cdot (-5)^2 - 45 \cdot (-5)$

$= -125 + 75 + 225$

$= 175$

$f(3) = 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 45 \cdot 3 = 27 + 27 - 135 = -81$

$\Rightarrow$ HP $(-5/175)$
TP $(3/-81)$

c) $f(x) = x^3 - 3x$
$f'(x) = 3x^2 - 3$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$3x^2 - 3 = 0$
$3x^2 = 3 \quad | :3$
$x^2 = 1$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

Hinr. Bed.:
$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$
$f'(0) = -3$
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 12 - 3 = 9$

y-Werte:
$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2$
$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2$

$\Rightarrow$ HP $(-1/2)$
TP $(1/-2)$

d) $f(x) = x^6$
$f'(x) = 6x^5$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$6x^5 = 0$
$x = 0$

Hinr. Bed:

$$f'(-1) = -6$$
$$f'(1) = 6$$

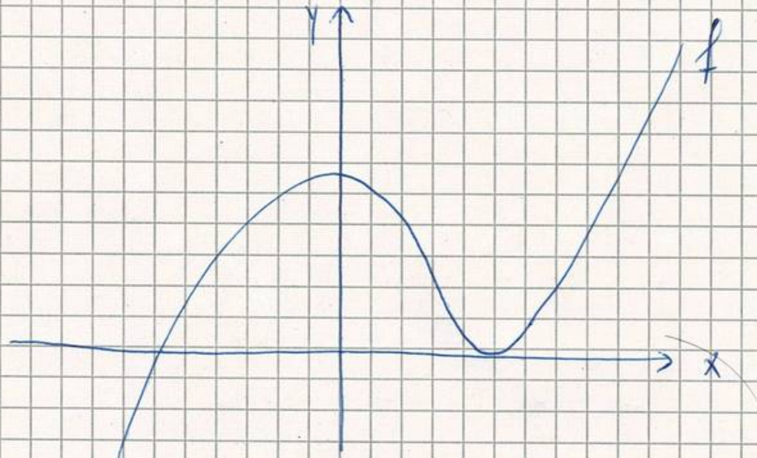
y-Wert:

$$f(0) = 0$$

$\Rightarrow TP(0/0)$

8) $f(x) = (x-1)^2 \cdot (x+3)$

9)



10) $f(x) = x^2 + 2x$

$f'(x) = 2x + 2$

Tangente: $t(x) = mx + b$

$m = f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

$\Rightarrow t(x) = 4x + b$

$A(1/f(1))$ liegt auf $f \Rightarrow f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$

$A(1|3)$ auf $t \Rightarrow t(1) = 3$

$4 \cdot 1 + b = 3$

$4 + b = 3 \quad |-4$

$b = -1$

$\Rightarrow t(x) = 4x - 1$