AUFGABEN

(Teil B: Teil mit Hilfsmitteln)

AUFGABE 1

Der Verlauf des Tiexonas-Flusses kann beschrieben werden mit der Funktion $f(x) = 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ mit $-5 \leq x \leq 2$. Dabei steht eine Längeneinheit für 100 m.

Die x-Achse stellt eine von West nach Ost verlaufende Straße (Autobahn 1) und die y-Achse eine von Süd nach Nord verlaufende Straße (Autobahn 2) dar.

a) Berechne die Koordinaten aller Punkte, wo die Straßen den Tiexonas überqueren.

b) Bestimme rechnerisch die Koordinaten des am weitesten südlich und die Koordinaten des am weitesten nördlich gelegenen Punktes des Flusslaufs.

c) Bestimme rechnerisch den Bereich, in dem sich der Flusslauf nach rechts krümmt.

d) Bestimme rechnerisch die Größe der Fläche zwischen dem Fluss und den beiden Straßen.

e) Gegeben seien die Geraden
$g(x) = 1$ und $h(x) = a$ mit $1 \leq a \leq 2$
(die jeweils parallel zur y-Achse verlaufen).
Die Geraden g, h, der Fluss und Autobahn 1 schließen eine Fläche ein.

Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den diese Fläche eine Größe von 1 ha hat.

f) Vom Punkt A (−3 / f(−3)) aus führt ein Wasserkanal Wasser aus dem Tiexonas nach Nordosten. Der Kanal kann mit Hilfe der Tangente an f durch den Punkt A beschrieben werden.

(I) Bestimme eine Gleichung, die den Verlauf des Kanals beschreibt

(II) Gib die Koordinaten des Punktes an, wo Autobahn 2 den Kanal überquert

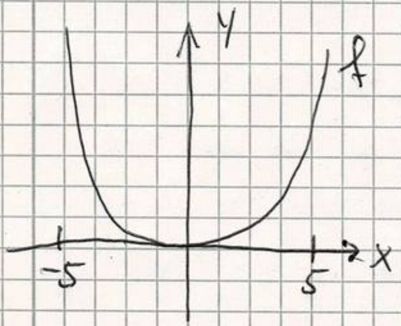
(III) Der Wasserkanal und der Fluss schließen eine Fläche ein.
Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt dieser Fläche.

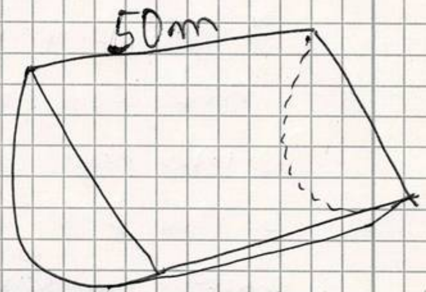
AUFGABE 2 (Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2015)

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge von 50 m gleich und kann beschrieben werden mit der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{125} x^4 \text{ mit } -5 \leq x \leq 5.$$

Eine Längeneinheit entspricht 1 m.





a) Bestimme rechnerisch die Tiefe des Laderaums in der Mitte

b) Bestimme rechnerisch die Breite des Laderaums in 3 m Höhe

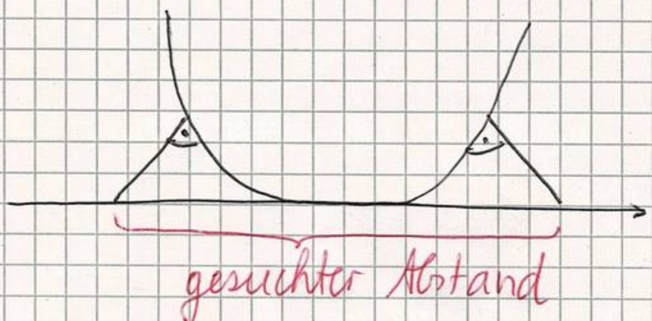
c) Berechne das Volumen des Laderaums

d) Bestimme rechnerisch den Bereich, in dem der Boden des Laderaums eine Neigung von weniger als 3° hat.

e) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform.

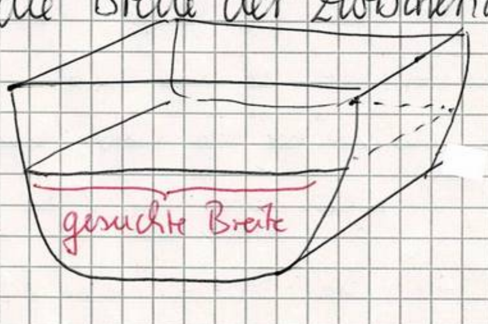
Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte an der Außenwand $P_1(-4\,/\,f(-4))$ und $P_2(4\,/\,f(4))$ sind.

Bestimme rechnerisch den Abstand, mit dem die Stützen auf der Plattform enden



f) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m^3.

Berechne die Breite der Zwischendecke.



AUFGABE 3

Ein Raumschiff bewegt sich von der Erde weg. Seine Geschwindigkeit kann beschrieben werden mit der Funktion $f(x) = 0{,}2x^3 + 5x - 8x + 18$ mit $-2 \leq x \leq 5$. Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 10 Uhr heute und f(x) für die Geschwindigkeit in Tausend km/h.

a) Bestimme rechnerisch die höchste und niedrigste Geschwindigkeit im betrachteten Zeitraum.

b) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, in dem das Raumschiff am stärksten beschleunigte.

c) Bestimme rechnerisch die im betrachteten Zeitraum insgesamt zurückgelegte Strecke.

d) Bestimme eine Funktionsgleichung, welche die Entfernung des Raumschiffs von der Erde angibt.
Das Raumschiff befindet sich um 8 Uhr 12.000 km von der Erde entfernt.

AUFGABE 4 (ABITUR BERLIN)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.
Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \le x \le 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.
Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.
[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

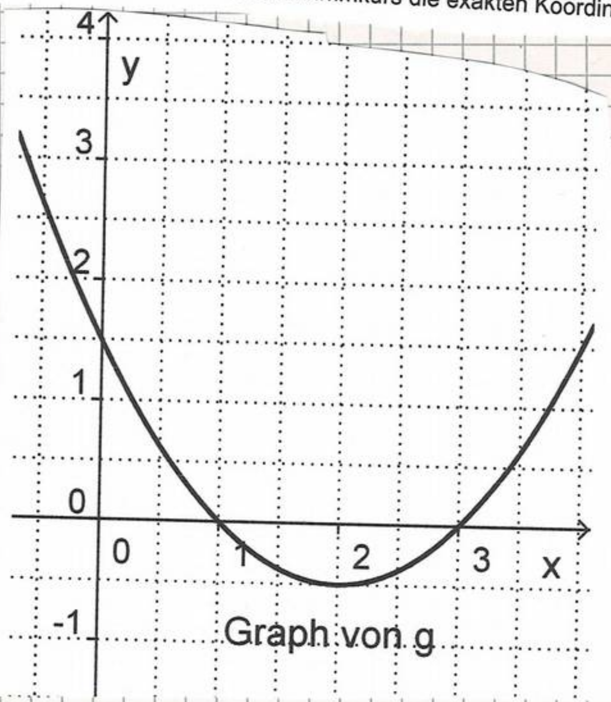
b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1 | 0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g ist.
Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

c) Bestimmen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte.
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.

e) Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

f) Im Punkt $P(3 | 0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.



AUFGABE 5 (Abitur Bremen)

Gläser

Es werden die mittigen Längsschnitte von Gläsern ohne die Füße und Stiele der Gläser[1] betrachtet. Eine Längeneinheit entspricht 1 cm in der Wirklichkeit. Die Materialstärke der Gläser wird im Folgenden vernachlässigt. Die Glasformen sind so gewählt, dass sich jeder Längsschnitt durch eine Funktion f_k beschreiben lässt mit $f_k(x) = -\frac{3 \cdot k}{512} \cdot x^4 + \frac{3 \cdot k^2}{32} \cdot x^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $k > 0$.

Die Abbildung 1 zeigt fünf zugehörige Graphen.

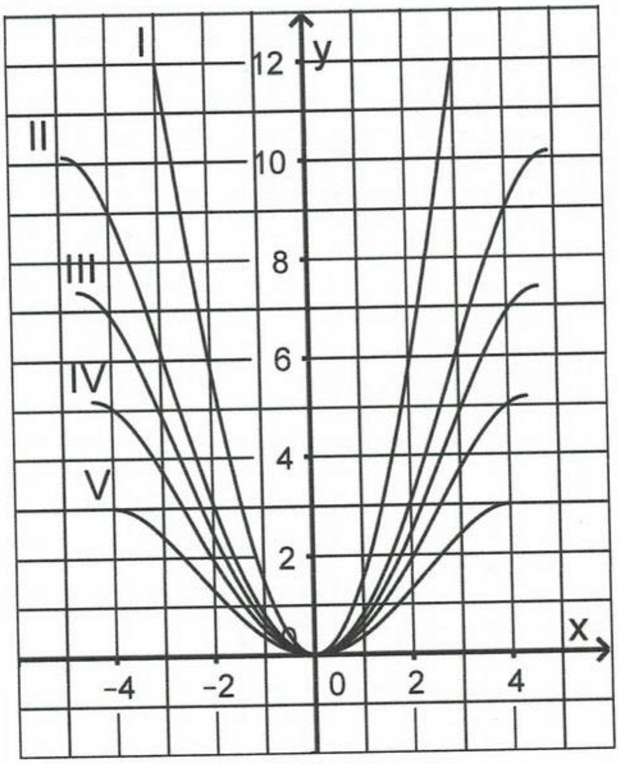


Abbildung 1

a) **Ordnen** Sie den Funktionen f_2 und f_3 jeweils mit Hilfe einer Rechnung den zugehörigen Graphen **zu.**

Begründen Sie, dass der Graph von f_k für jedes $k > 0$ symmetrisch zur y-Achse ist.

Berechnen Sie die möglichen Extremstellen von f_k (eine Überprüfung mit f_k'' ist nicht nötig).

Alle Extrempunkte $H_k\left(\sqrt{8k} \mid \frac{3}{8} \cdot k^3\right)$ liegen auf einer Ortskurve. **Bestimmen** Sie deren Gleichung.

Im Folgenden werden ein Cocktailglas und ein Sektglas näher betrachtet.

Der Längsschnitt des Cocktailglases lässt sich mit der Funktion f_3 beschreiben mit

$$f_3(x) = -\frac{9}{512} \cdot x^4 + \frac{27}{32} \cdot x^2, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}.$$

b) Um das Glas herum ist eine kreisrunde 18,85 cm lange Dekorlinie eingeschliffen.

Berechnen Sie, in welcher Höhe diese verläuft.

Im Glas steht ein Strohhalm,[2] der es im oberen Bereich tangential berührt. Im Modell entspricht dieser Berührpunkt dem Punkt $P(4\,|\,9)$.

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten t, welche die Lage des Strohhalms beschreibt.

Ermitteln Sie die Länge des Strohhalmabschnitts, der zwischen seinem unteren Punkt und dem Berührpunkt liegt.

Bestimmen Sie das Intervall für x, in dem der Längsschnitt des Cocktailglases linksgekrümmt ist.

Das Sektglas ist 12 cm hoch und sein oberer Rand hat einen Durchmesser von 6 cm.

c) **Geben** Sie an, welcher Graph den Längsschnitt des Sektglases beschreibt. (gemeint: von den Graphen in Abb. 1)

Der Längsschnitt des Sektglases erinnert an eine Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0\,|\,0)$.

Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Angaben eine quadratische Funktion p, die den Längsschnitt näherungsweise beschreibt.

Wird das Sektglas mit Flüssigkeit gefüllt, gibt die Funktion r mit

$$r(h) = \frac{1}{2}\sqrt{3h}, \text{ wobei } h \in \mathbb{R}_0^+$$

zu jeder Füllhöhe h in cm näherungsweise den Radius der Oberfläche der Flüssigkeit in cm an.

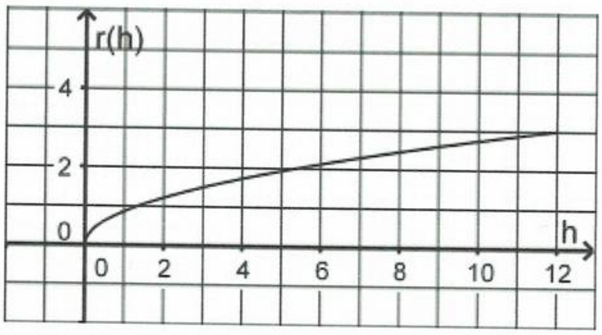


Abbildung 2

Ermitteln Sie unter Verwendung von r das Volumen der Flüssigkeit bei einer Füllhöhe von 6 cm.

In jedem Sektglas zeigt ein Markierungsstrich die Füllhöhe an, bei der das Glas genau $100\ cm^3$ Flüssigkeit enthält.

Untersuchen Sie, wie weit unterhalb des oberen Glasrandes sich diese Markierung befindet.

---

[2] Der Durchmesser des Strohhalms wird im Folgenden vernachlässigt.

AUFGABE 6 (IQB)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ und Definitionsmenge IR. Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f von f.

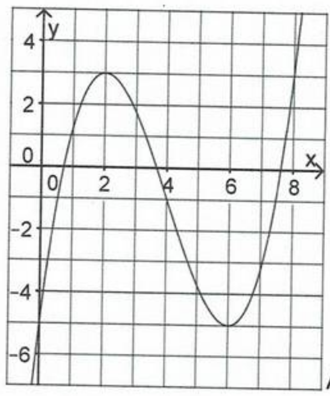


Abb. 1

a Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f.

b Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$ mit $c \in IR$. Ermitteln Sie mithilfe von Abbildung 1 die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c.

Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.

c Geben Sie einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann.

d Ein vereinfachter Term von g ist $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$. Begründen Sie mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punkts $(4 \mid -1)$ ist.

e Bestätigen Sie rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)\,dx = 5$ gilt.

f Bestimmen Sie ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)\,dx$ und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch geeignete Eintragungen in Abbildung 1.

Die Funktion f gehört zur Schar der in IR definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ und $a \in IR$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

g Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_a.

h Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts, durch den alle Graphen der Schar verlaufen.

i Untersuchen Sie rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.