

Lösungen (Teil mit Hilfsmitteln)

5a) Höhe : 5 cm, Radius 1,25 cm
Radius am Anfang : 0
" bei $x=2$: 0,2 cm
 $f''(2)=0$

$$\begin{aligned} P_1(5|1,25) \\ P_2(0|0) \\ P_3(2|0,2) \\ f''(2)=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1 &\Rightarrow f(5) = 1,25 \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 1,25 \quad \text{I} \\ P_2 &\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow d = 0 \quad \text{II} \\ P_3 &\Rightarrow f(2) = 0,2 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0,2 \quad \text{III} \\ &f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b = 0 \quad \text{IV} \end{aligned}$$

Wir setzen II ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad &125a + 25b + 5c = 1,25 \\ \text{III.} \quad &8a + 4b + 2c = 0,2 \\ \text{IV.} \quad &12a + 2b = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 125 & 25 & 5 & 1,25 \\ 8 & 4 & 2 & 0,2 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

GTR...

$$a = 0,05$$

$$b = -0,3$$

$$c = 0,5$$

$$\Rightarrow f(x) = 0,05x^3 - 0,3x^2 + 0,5x$$

(Keine H.B. vorhanden)

b) $g(0) = 0 \Rightarrow$ Radius 0 cm

$g(2) = 0,05 \cdot 2^3 - 0,27 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 2 = 0,32$ cm

c) $g'(x) = 0,15x^2 - 0,54x + 0,5$

$g''(x) = 0,3x - 0,54$

$g'''(x) = 0,3$

N.B.: $g''(x) = 0$

$0,3x - 0,54 = 0$

$0,3x = 0,54$

$x = 1,8$

H.B.: $g''(x) = 0 \wedge g'''(x) \neq 0$

$g'''(1,8) = 0,3 \neq 0 \checkmark$

Radius: $g(1,8) = 0,05 \cdot 1,8^3 - 0,27 \cdot 1,8^2 + 0,5 \cdot 1,8$
 $= \underline{\underline{0,3168}}$ cm

2a) Radius bei 0 m: 0,05 m $P_1(0|0,05)$

" " 1 m: 0,05 m $P_2(1|0,05)$

" " 0,5 m: 0,175 m $P_3(0,5|0,175)$

$f''(1) = -2$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$P_1 \Rightarrow d = 0,05$

$P_2 \Rightarrow a + b + c + d = 0,05$

$P_3 \Rightarrow \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d = 0,175$

$6a + 2b = -2$

I
II
III
IV

Wir setzen I ein und erhalten:

$$\text{II. } a + b + c = 0$$

$$\text{III. } \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c = 0,125$$

$$\text{IV. } 6a + 2b = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0,125 \\ 6 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

GTR...

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$b = 0$$

$$c = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + 0,05$$

$$b) f'(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{4}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$$

$$f'''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$\text{N.B.: } f'(x) = 0$$

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{4} = 0$$

$$x_1 = 0,7$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 4,3$$

$$\text{H.B.: } f'(x) = 0 \wedge \text{VZW von } f'$$

$$f'(0) = -0,75 \quad \left. \begin{array}{l} \text{VZW von } - \text{ nach } + \Rightarrow \text{TP} \\ f'(0,8) = 0,018 \end{array} \right\}$$

$$f'(2) = -0,75 \quad \left. \begin{array}{l} \text{VZW von } + \text{ nach } - \Rightarrow \text{HP} \\ f'(5) = 3 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{VZW von } - \text{ nach } + \Rightarrow \text{TP} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{lll}
 7) \quad 0 \text{ kg} & \rightarrow & 100 \text{ €} & P_1 (0|100) \\
 50 \text{ kg} & \rightarrow & 1400 \text{ €} & P_2 (50|1400) \\
 100 \text{ kg} & \rightarrow & 3000 \text{ €} & P_3 (100|3000)
 \end{array}$$

bei 50 kg: Änderungsrate 18 €/kg

4 Informationen \rightarrow 4 Gleichungen
 \rightarrow Grad 3

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
 f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c
 \end{aligned}$$

$$P_1 \Rightarrow f(0) = 100 \Rightarrow d = 100$$

$$P_2 \Rightarrow f(50) = 1400 \Rightarrow 125.000a + 2500b + 50c + d = 1400$$

$$f'(50) = 18 \Rightarrow 7500a + 100b + c = 18$$

$$P_3 \Rightarrow f(100) = 3000 \Rightarrow 1.000.000a + 10.000b + 100c + d = 3000$$

Wir setzen I ein und erhalten:

$$\text{II. } 125.000a + 2500b + 50c = 1300$$

$$\text{III. } 7500a + 100b + c = 18$$

$$\text{IV. } 1.000.000a + 10.000b + 100c = 2900$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}
 125.000 & 2500 & 50 & 1300 \\
 7500 & 100 & 1 & 18 \\
 1.000.000 & 10.000 & 100 & 2900
 \end{array} \right)$$

GTR...

$$a = \frac{11}{2500}$$

$$b = -0,6$$

$$c = 45$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{11}{2500} x^3 - 0,6 x^2 + 45x + 100$$

(Seite H. B. vorhanden)

$$8a) \quad g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$P_1(0|0) \text{ waag. Tangente} \Rightarrow g(0) = 0$$

$$g'(0) = 0$$

$$P_2(8) = 3,2 \text{ HP} \quad \Rightarrow g(8) = 3,2$$

$$g'(8) = 0$$

$$P_1 \Rightarrow d = 0$$

I.

$$P_1 \Rightarrow c = 0$$

II.

$$P_2 \Rightarrow 512a + 64b + 8c + d = 3,2 \quad \text{III.}$$

$$P_2 \Rightarrow 192a + 16b + c = 0 \quad \text{IV.}$$

Aus I und II folgt:

$$\begin{array}{l} \text{III.} \\ \text{IV.} \end{array} \quad \begin{array}{l} 512a + 64b = 3,2 \\ 192a + 16b = 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 512 & 64 & 3,2 \\ 192 & 16 & 0 \end{array} \right)$$

GTR...

$$a = -0,0125$$

$$b = 0,15$$

$$\Rightarrow g(x) = -0,0125x^3 + 0,15x^2$$

H.B.: $g'(x) = -0,0375x^2 + 0,3x$

$$g''(x) = -0,075x + 0,3$$

$$g''(0) = 0,3 > 0 \Rightarrow \text{TP bei } x=0 \text{ \& waag. Tang.}$$

$$g''(8) = -0,3 < 0 \Rightarrow \text{HP bei } x=8 \checkmark$$

$$b) \quad g(0) = 0 \text{ und } f(0) = 0 \checkmark$$

$$g'(0) = 0$$

$$f'(0) = 0 \checkmark$$

$$f'(x) = -0,0219x^2 + 0,0958x$$

$$g(0) = f(0) \text{ und } g'(0) = f'(0) \checkmark$$

Linkskrümmung:

gemult: w^r

$$f''(x) = -0,0438x + 0,0958$$

$$f'''(x) = -0,0438$$

$$\text{N.B.: } f''(x) = 0$$

$$-0,0438x + 0,0958 = 0$$

$$0,0958 = 0,0438x$$

$$2,1826 = x$$

$$\text{H.B.: } f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f'''(2,1826) = -0,0438$$

\Rightarrow Übergang von L- zu R-Krümmung

\Rightarrow Bel.

$$c) \quad g_k(x) = -0,0125x^3 + kx^2$$

$$g_k'(x) = -0,0375x^2 + 2kx$$

$$g_k''(x) = -0,075x + 2k$$

$$\text{N.B.: } g_k'(x) = 0$$

$$-0,0375x^2 + 2kx = 0$$

$$x \cdot (-0,0375x + 2k) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$-0,0375x = -2k$$

$$x = \frac{2k}{0,0375} = \frac{160}{3}k$$

$$\text{H.B.: } g_n'(x) = 0 \wedge g_n''(x) \neq 0$$

$$\textcircled{1} g_n''(0) = 2k > 0 \quad k > 0$$

$$\Rightarrow \text{TP bei } x=0$$

$$g_n(0) = 0$$

$$\Rightarrow \text{TP}(0/0)$$

$$\textcircled{2} g_n''\left(\frac{160}{3}k\right) = -0,075 \cdot \frac{160}{3}k + 2k$$

$$= -4k + 2k$$

$$= -2k < 0$$

$$k > 0$$

$$\Rightarrow \text{HP bei } x = \frac{160}{3}k$$

$$g_n\left(\frac{160}{3}k\right) = -0,125 \cdot \left(\frac{160}{3}k\right)^3 + k \cdot \left(\frac{160}{3}k\right)^2$$

$$= -\frac{1}{80} \cdot \frac{4096000}{27} k^3 + k \cdot \frac{25600}{9} k^2$$

$$= -\frac{51200}{27} k^3 + \frac{25600}{9} k^3$$

$$= \frac{25600}{27} k^3$$

$$\Rightarrow \text{HP}\left(\frac{160}{3}k \mid \frac{25600}{27}k^3\right)$$

Der Abstand auf dem Boden (bei den x -Werten) soll zwischen 7 und 8 betragen:

$$7 < x_{\text{HP}} - x_{\text{TP}} < 8$$

$$k > 0$$

$$7 < \frac{160}{3}k - 0 < 8$$

$$7 < \frac{160k}{3} < 8$$

$$\text{Links: } 7 < \frac{160k}{3}$$

$$21 < 160k$$

$$\frac{21}{160} < k$$

$$\text{Rechts: } \frac{160k}{3} < 8$$

$$160k < 24$$

$$k < \frac{24}{160}$$

$$\Rightarrow \frac{21}{160} < h < \frac{24}{160}$$

$$\text{Ortskurve: } HP \left(\frac{160}{3} h / \frac{25.600}{27} h^3 \right)$$

$$\frac{160}{3} h = x$$

$$160h = 3x$$

$$h = \frac{3}{160} x$$

$$\Rightarrow y = \frac{25.600}{27} \cdot \left(\frac{3}{160} x \right)^3$$

$$= \frac{25.600}{27} \cdot \frac{27}{40.960.000} x^3$$

$$= \frac{1}{160} x^3$$

$$\Rightarrow o(x) = \frac{1}{160} x^3$$

größte und kleinste Höhe:

$$\text{N.B.: } o'(x) = 0$$

$$\frac{3}{160} x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad (\text{außerhalb des Def. Bereichs})$$

$$\text{Ränder: } o(7) \approx 2,14$$

$$o(8) = 3,2$$

größte Wert: 3,2 dm

kleinste " $\approx 2,14$ dm