Lösungen (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) $x^3 - a^2x = 0$

$x \cdot (x^2 - a^2) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - a^2 = 0$

$x^2 = a^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = a$

$x_2 = -a$

Fallunterscheidung:

$a = 0$ eine NS $x = 0$

$a \neq 0$ drei NS

$x_1 = -a$

$x_2 = 0$

$x_3 = a$

b) $f_a'(x) = 3x^2 - a^2$

$f_a''(x) = 6x$

N.B.: $f_a'(x) = 0$

$3x^2 - a^2 = 0$

$3x^2 = a^2 \quad |:3$

$x^2 = \frac{a^2}{3} \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$

H.B.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} > 0$ für $a > 0$, < 0 für $a < 0$

$f_a''\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) < 0$ für $a > 0$, > 0 für $a < 0$

Fallunterscheidung:

$a<0$	$a=0$	$a>0$
$x_1=\frac{a}{\sqrt{3}}$ HP	$f_0(x)=x^3$	$x_1=\frac{a}{\sqrt{3}}$ TP
$x_2=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ TP	$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x=0$	$x_2=-\frac{a}{\sqrt{3}}$ HP

y-Werte:

$$f_a\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3-a^2\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=\frac{a^3}{\sqrt{3}^3}-\frac{a^3}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{a^3}{\sqrt{3}^3}-\frac{3a^3}{\sqrt{3}^3}$$
$$=-\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}$$

$$f_a\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3-a^2\cdot\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$
$$=-\frac{a^3}{\sqrt{3}^3}+\frac{a^3}{\sqrt{3}}$$
$$=-\frac{a^3}{\sqrt{3}^3}+\frac{3a^3}{\sqrt{3}^3}$$
$$=\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}$$

$a<0$	$a>0$	$a=0$
$HP\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\middle/-\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}\right)$	$TP\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\middle/-\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}\right)$	$SP(0/0)$
$TP\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\middle/+\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}\right)$	$HP\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\middle/+\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}\right)$	

c) $E_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}} \Big/ -\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}\right)$

$x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ $\qquad\qquad$ $y = -\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}$

$\sqrt{3}x = a$

$\Rightarrow \quad y = -\frac{2 \cdot (\sqrt{3}x)^3}{\sqrt{3}^3} = -\frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot (\sqrt{3})^3 \cdot x^3 = -2x^3$

$\Rightarrow O(x) = -2x^3 \quad , x \neq 0$

$E_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}} \Big/ +\frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}\right)$

$x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ $\qquad\qquad$ $y = \frac{2a^3}{\sqrt{3}^3}$

$-\sqrt{3}x = a$

$\Rightarrow y = \frac{2 \cdot (-\sqrt{3}x)^3}{\sqrt{3}^3} = \frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot (-\sqrt{3})^3 \cdot x^3 = -2x^3$

$\Rightarrow O(x) = -2x^3 \quad , x \neq 0$

d) $x^3 - a^2x = x^3 - b^2x \quad | -x^3 \ / \cdot (-1) \qquad a \neq b$

$a^2x = b^2x$

$a^2x - b^2x = 0$

$x \cdot (\underbrace{a^2 - b^2}_{\neq 0}) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 0^3 - a^2 \cdot 0 = 0$

Es gibt einen gemeinsamen Punkt: $P(0/0)$.

e) $f(a) = a^3 - a^3 = 0$

$\Rightarrow P(a/0)$

$t_a(x) = mx + b$

$m = f_a'(a)$

$m = 3a^2 - a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow t_a(x) = 2a^2x + b$

$P(a/0)$ auf $t_a \Rightarrow t_a(a) = 0$

$2a^2 \cdot a + b = 0$

$2a^3 + b = 0$

$b = -2a^3$

$\Rightarrow t_a(x) = 2a^2x - 2a^3$

f) $f_a(x) = g_b(x)$

$x^3 - a^2x = bx$

$x^3 - a^2x - bx = 0$

$x^3 - (a^2 + b) \cdot x = 0$

$x \cdot (x^2 - (a^2 + b)) = 0$

$x_1 = 0$

$x^2 - (a^2 + b) = 0$

$x^2 = a^2 + b \quad | \sqrt{\ }$

$x = \pm \sqrt{a^2 + b}$

Wann wird $a^2 + b$ negativ ode Null?

$a^2 + b = 0$

$-a^2 = b$

$\Rightarrow \quad -a^2 < b \Rightarrow \sqrt{a^2+b}$ lösbar und $\neq 0$

$-a^2 = b \Rightarrow \sqrt{a^2+b} = 0$

$-a^2 > b \Rightarrow \sqrt{a^2+b}$ Keine Lösung

Fallunterscheidung:

$b > -a^2$	$b = -a^2$	$b < -a^2$
3 Ergebnisse	1 Ergebnis	1 Ergebnis
$x_1 = 0$	$x = 0$	$x = 0$
$x_2 = \sqrt{a^2+b}$		
$x_3 = -\sqrt{a^2+b}$		
$S_1(0/0)$	$S(0/0)$	$S(0/0)$
$S_2(\sqrt{a^2+b} / y_2)$		
$S_3(-\sqrt{a^2+b} / y_3)$		
$y_2 = b \cdot \sqrt{a^2+b}$		
$y_3 = -b \cdot \sqrt{a^2+b}$		

2a) Alle Exponenten sind gerade

$\Rightarrow f_t(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse

b) $-\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 = 0$

$$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2\right) = 0$$

$x_1 = 0$

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2$$

$$x^2 = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^2$$

$$x^2 = 6t^2$$

$$x = \pm\sqrt{6}\,t \qquad t > 0$$

$\Rightarrow$ drei NS: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{6}\,t$; $x_3 = -\sqrt{6}\,t$

c) $f_t'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2 x$

$f_t''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2$

$f_t'''(x) = -\frac{8}{3}x$

Extrempunkt:

N.B.: $f_t'(x) = 0$

$-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2 x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0$

$\frac{4}{3}t^2 = \frac{4}{9}x^2 \quad \Big| \cdot \frac{9}{4}$

$3t^2 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{3}\,t = x \qquad t > 0$

H.B.: $f_t'(x) = 0 \land f_t''(x) \neq 0$

$f_t''(0) = \frac{4}{3}t^2 > 0$

$f_t''(\sqrt{3}\,t) = -\frac{4}{3} \cdot 3t^2 + \frac{4}{3}t^2 = -\frac{12}{3}t^2 + \frac{4}{3}t^2 = -\frac{8}{3}t^2 < 0$

$f_t''(-\sqrt{3}\,t) = -\frac{8}{3}t^2 < 0$

y-Werte:

$f_t(0) = 0$

$f_t(\sqrt{3}\,t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3}t^2 \cdot 3t^2 = -t^4 + 2t^4 = t^4$

$f_t(-\sqrt{3}\,t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3}t^2 \cdot 3t^2 = t^4$

Ergebnis: $TP\ (0/0)$

$HP_1\ (\sqrt{3}t\ /\ t^4)$

$HP_2\ (-\sqrt{3}t\ /\ t^4)$

Wendepunkte:

N.B.: $f_t''(x) = 0$

$$-\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0$$

$$\frac{4}{3}t^2 = \frac{4}{3}x^2$$

$$t^2 = x^2 \qquad t > 0$$

$$\pm\ t = x$$

H.B.: $f_t''(x) = 0 \wedge f_t'''(x) \neq 0$

$$f_t'''(t) = -\frac{8}{3} \cdot t < 0 \neq 0 \qquad t > 0$$

$$f_t'''(-t) = -\frac{8}{3} \cdot -t > 0 \neq 0$$

y-Werte:

$$f_t(t) = -\frac{1}{9} \cdot t^4 + \frac{2}{3}t^2 \cdot t^2 = -\frac{1}{9}t^4 + \frac{6}{9}t^4 = \frac{5}{9}t^4$$

$$f_t(-t) = -\frac{1}{9}t^4 + \frac{2}{3}t^2 \cdot t^2 = \frac{5}{9}t^4$$

$\Rightarrow WP_1\ (t\ /\ \frac{5}{9}t^4)$

$WP_2\ (-t\ |\ \frac{5}{9}t^4)$

d) $HP_1\ (\sqrt{3}t\ |\ t^4)$

$$x = \sqrt{3}t \qquad y = t^4$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x = t$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^4 = \frac{1}{9}x^4$$

$HP_2 \left(-\sqrt{3}\, t \,/\, t^4 \right)$

$x = -\sqrt{3}\, t \qquad y = t^4$

$-\frac{1}{\sqrt{3}} x = t$

$\Rightarrow y = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} x\right)^4 = \frac{1}{9} x^4$

$\Rightarrow o(x) = \frac{1}{9} x^4$

e) NS $\quad x_1 = 0 \;;\; x_2 = \sqrt{6} \cdot 2 \;;\; x_3 = -\sqrt{6} \cdot 2$

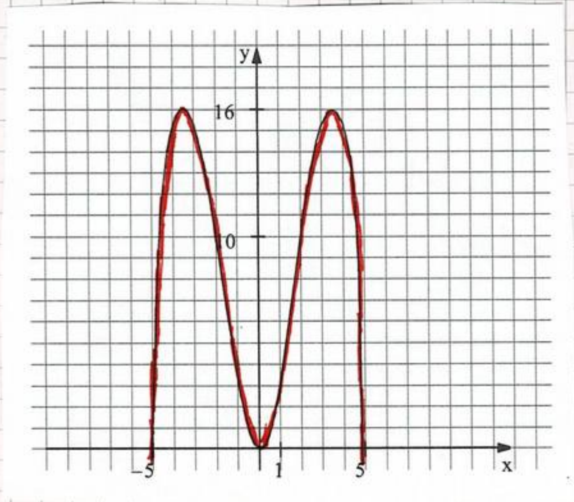
TP $(0/0)$

$HP_1 \left(\sqrt{3} \cdot 2 \,/\, 16 \right)$

$HP_2 \left(-\sqrt{3} \cdot 2 \,/\, 16 \right)$

$WP_1 \left(2 \,/\, \frac{5}{9} \cdot 16 \right)$

$WP_2 \left(-2 \,/\, \frac{5}{9} \cdot 16 \right)$



f) $g(x) = ax^2 + bx + c$

$P_1 \left(t \,\middle|\, \frac{5}{9} t^2 \right) \Rightarrow g(t) = \frac{5}{9} t^2 \Rightarrow at^2 + bt + c = \frac{5}{9} t^2$

$P_2 \left(\sqrt{6}\, t \,/\, 0 \right) \Rightarrow g(\sqrt{6}\, t) = 0 \Rightarrow 6at^2 + \sqrt{6}\, tb + c = 0$

$P_3 \left(-\sqrt{6}\, t \,/\, 0 \right) \Rightarrow g(-\sqrt{6}\, t) = 0 \Rightarrow 6at^2 - \sqrt{6}\, tb + c = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2 & t & 1 & \frac{5}{9}t^2 \\ 6t^2 & \sqrt{6}t & 1 & 0 \\ 6t^2 & -\sqrt{6}t & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 6\cdot \underline{I}-\underline{II} \\ 6\cdot \underline{I}-\underline{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2 & t & 1 & \frac{5}{9}t^2 \\ 0 & 6t-\sqrt{6}t & 5 & \frac{30}{9}t^2 \\ 0 & 6t+\sqrt{6}t & 5 & \frac{30}{9}t^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \underline{II}-\underline{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2 & t & 1 & \frac{5}{9}t^2 \\ 0 & 6t-\sqrt{6}t & 5 & \frac{30}{9}t^2 \\ 0 & -2\sqrt{6}t & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -2\sqrt{6}t \cdot b = 0 \quad | : (-2\sqrt{6}t) \qquad t > 0$

$b = 0$

$\Rightarrow 5c = \frac{30}{9}t^2 \quad | : 5$

$c = \frac{6}{9}t^2 = \frac{2}{3}t^2$

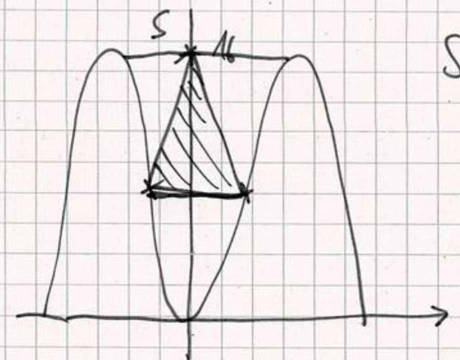
$\Rightarrow t^2 \cdot a + \frac{6}{9}t^2 = \frac{5}{9}t^2 \quad | - \frac{6}{9}t^2$

$t^2 \cdot a = -\frac{1}{9}t^2 \quad | : t^2 \qquad t > 0$

$a = -\frac{1}{9}$

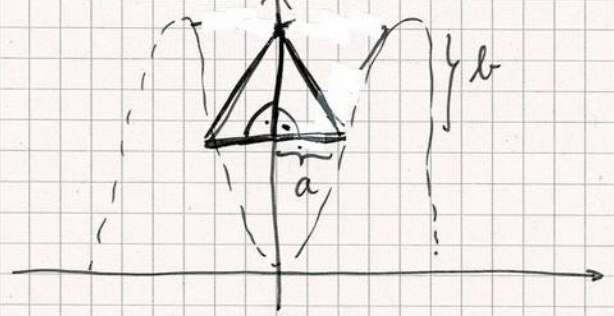
$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2$

g) Skizze:



$S(0/16)$

Das Dreieck besteht aus 2 gleich großen rechtwinkligen Dreiecken:



$$A_\Delta = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a \cdot b$$

$$a = x_p$$

$$b = 16 - f_2(x_p) = 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^2 \cdot x_p^2\right)$$

$$= 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$= 16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2$$

$$\Rightarrow A(x_p) = x_p \cdot \left(16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$= 16x_p + \frac{1}{9}x_p^5 - \frac{8}{3}x_p^3$$

gesucht: Maximum von $A(x_p)$

$$A'(x_p) = 16 + \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2$$

$$A''(x_p) = \frac{20}{9}x_p^3 - 16x_p$$

N.B.: $A'(x_p) = 0$

$$16 + \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 = 0$$

GTR ... $\left.\begin{array}{l} x_{p_1} = -3{,}46 \\ x_{p_2} = -1{,}55 \end{array}\right\}$ außerhalb des Def. bereichs

$x_{p_3} = 1{,}55$

$x_{p_4} = 3{,}46$

$H.B.: A'(x_p) = 0 \wedge A''(x_p) \neq 0$

$A''(x_{P_3}) = -16{,}52 < 0 \Rightarrow HP$

$A''(x_{P_4}) = 36{,}69 > 0 \Rightarrow TP$

Ränder und y-Wert:

$A(0) = 0$

$A(1{,}55) = 15{,}864$

$A(2\cdot\sqrt{3}) = 0$

$\Rightarrow x_p \approx 1{,}55$ mit $A \approx 15{,}864$ FE (Flächeneinheiten)

3a) zu Beginn: $6600\ m^3/s$ $\quad P_1(0|6600)$

nach 1 h: $9000\ m^3/s$ höchster Wert $\quad P_2(1|9000)$ HP

nach 3 h wie zu Beginn $\quad P_3(3|6600)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P_1(0|6600) \Rightarrow d = 6600 \quad \text{I.}$

$P_2(1|9000) \Rightarrow a + b + c + d = 9000 \quad \text{II.}$

$3a + 2b + c = 0 \quad \text{III.}$

$P_3(3|6600) \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 6600 \quad \text{IV.}$

Nach Einsetzen von I ergibt sich:

II. $a + b + c = 2400$
III. $3a + 2b + c = 0$
IV. $27a + 9b + 3c = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2400 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$a = 600$
$b = -3600$
$c = 5400$

$\Rightarrow f(x) = 600x^3 - 3600x^2 + 5400x + 6600$

Kontrolle der HB:

$f'(x) = 1800x^2 - 7200x + 5400$
$f''(x) = 3600x - 7200$

$f''(1) = 3600 - 7200 = -3600 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = 1$ ✓

b) $f_k(2) = 600 \cdot 2^3 - k \cdot 2 + 5400 \cdot 2 + 6600 = 22.200 - 2k$

$f_k(3) = 600 \cdot 3^3 - k \cdot 3 + 5400 \cdot 3 + 6600 = 39.000 - 3k$

Da es sich um lineare Funktionen handelt, wird der größte Wert bei $k = 3550$ und der kleinste bei $k = 3600$ erreicht.

Kleinster Wert: $x = 2 \rightarrow 15.000$
$x = 3 \rightarrow 28.200$

größter Wert: $x = 2 \rightarrow 15.100$
$x = 3 \rightarrow 28.350$

c) $f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600$

$f_k'(x) = 1800x^2 - 2kx + 5400$

$f_k''(x) = 3600x - 2k$

$f_k'''(x) = 3600$

N.B.: $f_k''(x) = 0$

$$3600x - 2k = 0$$
$$3600x = 2k$$
$$x = \frac{2k}{3600} = \frac{k}{1800}$$

H.B.: $f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''\left(\frac{k}{1800}\right) = 3600 \neq 0 \checkmark$$

y-Wert: $y = 600 \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^3 - k \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^2 + 5400 \cdot \frac{k}{1800} + 6600$

$$= \frac{k^3}{9720000} - \frac{k^3}{3240000} + 3k + 6600$$

$$= -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600 \ \frac{m^3}{s}$$

Der Wendepunkt ist der Zeitpunkt mit der größten Abnahme der Fließgeschwindigkeit.

d) $WP\left(\frac{k}{1800} \,\middle|\, -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600\right)$

$x = \frac{k}{1800}$ $\qquad\qquad$ $y = -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600$

$1800x = k$

$$\Rightarrow y = -\frac{(1800x)^3}{4860000} + 3 \cdot 1800x + 6600$$

$$= -1200x^3 + 5400x + 6600$$

$$\Rightarrow O(x) = -1200x^3 + 5400x + 6600$$

e) $1h = 3600s$

$\Rightarrow g_h(x) = 3600 \cdot f_h(x)$

4a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

HP $(-4|3,2) \Rightarrow f(-4) = 3,2 \Rightarrow -64a + 16b - 4c + d = 3,2$
$f'(-4) = 0 \Rightarrow 48a - 8b + c = 0$
TP $(0|0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$\Rightarrow$ I. $-64a + 16b = 3,2$
II. $48a - 8b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -64 & 16 & 3,2 \\ 48 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

GTR...
$a = 0,1$
$b = 0,6$

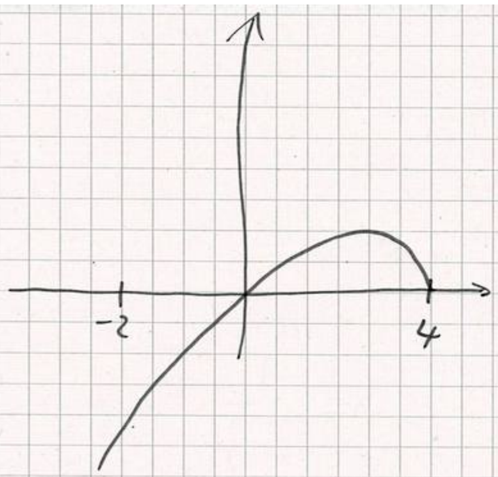
$\Rightarrow f(x) = 0,1x^3 + 0,6x^2$

Kontrolle der H.B.:
$f'(x) = 0,3x^2 + 1,2x$
$f''(x) = 0,6x + 1,2$

$f''(-4) = 0,6 \cdot (-4) + 1,2 = -1,2 \Rightarrow$ HP
$f''(0) = 1,2 \Rightarrow$ TP

✓

b)



h ist streng mo. fallend für $-2 < x < 0$
$\Rightarrow h'$ negativ

h ist streng mo. wachsend für $0 < x < 4$
$\Rightarrow h'$ positiv

c) Die größte Steigung liegt beim Wendepunkt vor.

$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2$
$f'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2x$

$f''(x) = -0{,}6x + 1{,}2$
$f'''(x) = -0{,}6$

N.B.: $f''(x) = 0$
$-0{,}6x + 1{,}2 = 0$
$\Rightarrow x = 2$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$
$f'''(2) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow$ HP bei f'

Steigung: $f'(2) = -0{,}3 \cdot 4 + 1{,}2 \cdot 2 = 1{,}2$
$\hat{=}$ 120%

$\Rightarrow$ Der Käfer kann es schaffen.