LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1a) $6^2 + 6a + 4 = 0$

$36 + 6a + 4 = 0$

$6a = -40$

$\underline{a = -\frac{40}{6} = -\frac{20}{3}}$

b) $f_a(x) = x^2 + ax + 4$

$f_a'(x) = 2x + a$

$f_a''(x) = 2$

N.B.: $f_a'(x) = 0$

$2x + a = 0$

$2x = -a$

$x = -a/2$

H.B.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(-\frac{a}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow$ Min. bei $x = -\frac{a}{2}$

y-Wert: $f_a(-\frac{a}{2}) = (-\frac{a}{2})^2 + a \cdot (-\frac{a}{2}) + 4$

$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + 4$

$= -\frac{a^2}{4} + 4$

$\Rightarrow TP\left(-\frac{a}{2} \,\middle|\, -\frac{a^2}{4} + 4\right)$

c) $x = -\frac{a}{2}$ und $y = -\frac{a^2}{4} + 4$

$2x = -a$

$-2x = a$

$\Rightarrow y = -\frac{(-2x)^2}{4} + 4 = -\frac{4x^2}{4} + 4 = -x^2 + 4 \Rightarrow o(x) = -x^2 + 4$

d) $f_a'(x) = 2x + a$ $\qquad f_a(1) = 1 + a + 4 = a + 5$

$f_a'(1) = 2 + a$

$\Rightarrow t_a(x) = (2+a) \cdot x + b$

$P(1/a+5)$ liegt auf $t_a \Rightarrow t_a(1) = a + 5$

$$(2+a) \cdot 1 + b = a + 5$$
$$2 + a + b = a + 5 \quad | -a$$
$$2 + b = 5 \quad | -2$$
$$b = 3$$

$\Rightarrow t_a(x) = (2+a) \cdot x + 3$

e) $n_a(x) = m_1 \cdot x + b_1$

$$m_1 \cdot (2+a) = -1$$
$$m_1 = \frac{-1}{2+a} \quad , a \neq -2$$

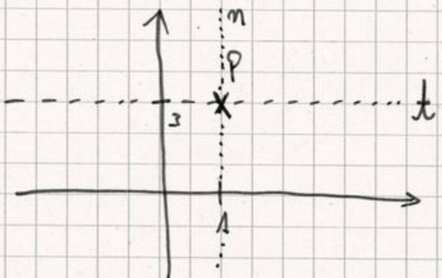
$\Rightarrow n_a(x) = -\frac{1}{2+a} \cdot x + b_1$

$P(1/a+5)$ liegt auf $n_a \Rightarrow n_a(1) = a + 5$

$$-\frac{1}{2+a} \cdot 1 + b_1 = a + 5$$
$$-\frac{1}{2+a} + b_1 = a + 5$$
$$b_1 = a + 5 + \frac{1}{2+a}$$

$\Rightarrow n_a(x) = -\frac{1}{2+a} \cdot x + a + 5 + \frac{1}{2+a}$ für $a \neq -2$

Falls $a=-2$, dann gilt: $t(x)=3$



Die Normale wäre eine Parallele zur y-Achse. Eine solche Zuordnung kann aber keine Funktion sein (da jedem x-Wert nur ein y-Wert zugeordnet werden darf).
Die Normale hätte die Gleichung $x=1$.
Dies ist keine Funktion.

f) $$x^2+ax+4 = x^2+bx+4 \quad |-x^2 \qquad a \neq b$$
$$ax+4 = bx+4 \quad |-4$$
$$ax = bx$$
$$ax-bx = 0$$
$$\underbrace{(a-b)}_{\neq 0} \cdot x = 0$$
$$\Rightarrow x=0$$

$$f_a(0)=4$$

$\Rightarrow$ Es gibt einen gemeinsamen Punkt: $P(0/4)$.

g) $P(a|3a^2)$ liegt auf f_a $\Rightarrow$ $f_a(a)=3a^2$

$$a^2+a\cdot a+4 = 3a^2$$
$$a^2+a^2+4 = 3a^2$$
$$2a^2+4 = 3a^2 \quad |-2a^2$$

$4 = a^2 \quad |\sqrt{}$

$\underline{a = \pm 2}$

2a) $x^3 - 6x^2 - 7x = 0$

$x \cdot (x^2 - 6x - 7) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 - 6x - 7 = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9 + 7}$

$x = 3 \pm \sqrt{16}$

$x = 3 \pm 4$

$x_2 = 7$

$x_3 = -1$

NS: $x_1 = 0;\ x_2 = 7;\ x_3 = -1$

b) $1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4} = 0 \quad | \cdot x^4$

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$

$z = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$

$z = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 4 \quad | z = x^2$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = 4 \quad |\sqrt{}$

$x_1 = 1 \qquad x_3 = 2$

$x_2 = -1 \qquad x_4 = -2$

NS: $x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 2;\ x_4 = -2$

c) $(x+3)\cdot(x^2-81)=0$

$x+3=0$ oder $x^2-81=0$

$x_1=-3$ $\quad x^2=81 \mid \sqrt{\ }$

$x_2=9$

$x_3=-9$

NS: $x_1=-3$; $x_2=9$; $x_3=-9$

d) $x^3-8ax^2=0$

$x^2\cdot(x-8a)=0$

$x^2=0$ oder $x-8a=0$

$x_1=0$ $\quad x_2=8a$

NS: $a=0$ $\quad a\neq 0$

$x=0$ $\quad x_1=0$

$x_2=8a$

e) $x^2-2x+a=0$

$x=1\pm\sqrt{1-a}$

Fall 1: $a>1$ keine NS

Fall 2: $a=1$ eine NS $x=1$

Fall 3: $a<1$ zwei NS $x_1=1+\sqrt{1-a}$

$x_2=1-\sqrt{1-a}$

f) $x^5-3x^3-4x=0$

$x\cdot(x^4-3x^2-4)=0$

$x_1=0$ $\quad x^4-3x^2-4=0 \mid x^2=z$

$z^2-3z-4=0$

$z = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4}$

$z = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$z = 1{,}5 \pm 2{,}5$

$z_1 = -1$

$z_2 = 4$ $\quad | \; z = x^2$

$x^2 = -1$ $\quad$ ↯

$x^2 = 4$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

NS: $x_1 = 2$; $x_2 = -2$

3) $ax^2 - bx = 0$

$x \cdot (ax - b) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $ax - b = 0$

$ax = b \quad | : a$

$x = \frac{b}{a}$

Fall 1: $a = 0$ $\qquad$ eine NS: $x = 0$

Fall 2: $a \neq 0$, $b = 0$ $\qquad$ eine NS: $x = 0$

Fall 3: $a \neq 0$, $b \neq 0$ $\qquad$ zwei NS: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{b}{a}$

4a) $|x - 2| = 6$

$x - 2 = 6$ $\quad$ bzw. $\quad$ $x - 2 = -6$

$x_1 = 8$ $\qquad$ $x_2 = -4$

b) $2 \cdot |3x-2| \leq 12 \quad | :2$

$|3x-2| \leq 6$

$3x-2 \leq 6 \qquad\qquad 3x-2 \geq -6$

$3x \leq 8 \qquad\qquad 3x \geq -4$

$x \leq \frac{8}{3} \qquad\qquad x \geq -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \quad -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$

5) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \\ 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$

$\Rightarrow 5z = 10$

$z = 2$

$\Rightarrow 3y + 6 = 9$

$3y = 3$

$y = 1$

$\Rightarrow x + 1 + 2 = 5$

$x = 2$

6) $f(x) = a \cdot (x-d)^2 + e \qquad S(d/e)$

$S(2|3) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 3$

$A(1|10)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 10$

$$\Rightarrow 10 = a(1-2)^2+3$$
$$10 = a\cdot(-1)^2+3$$
$$10 = a \quad +3$$
$$7 = a$$

$$\Rightarrow f(x) = 7\cdot(x-2)^2+3$$
$$= 7\cdot(x^2-4x+4)+3$$
$$= 7x^2-28x+28+3$$
$$= 7x^2-28x+31$$

7) $f_a(x) = v_1\cdot(x-v_2)^2+v_3 \qquad S(v_2/v_3)$

$S(2|a) \Rightarrow f_a(x) = v_1\cdot(x-2)^2+a$

$A(1|10)$ auf $f \Rightarrow f_a(1) = 10$
$$v_1\cdot(1-2)^2+a = 10$$
$$v_1\cdot(-1)^2+a = 10$$
$$v_1 + a = 10$$
$$v_1 = 10-a$$

$$\Rightarrow f_a(x) = (10-a)\cdot(x-2)^2+a$$
$$= (10-a)\cdot(x^2-4x+4)+a$$
$$= (10-a)\cdot x^2-(40-4a)\cdot x+(40-4a)+a$$
$$= (10-a)\cdot x^2-(40-4a)\cdot x+(40-3a)$$

8a) Es handelt sich um $g(x)$, da gilt
$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.
Es gilt für f und h aber
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$

b) $P(a \mid f(a))$ ist ein Punkt auf dem Graphen von f.

$f(a) = a^2 - a + 1$

$\Rightarrow P(a \mid a^2 - a + 1)$

$t_a(x) = mx + b$

$m = f'(a)$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(a) = 2a - 1$

$\Rightarrow t_a(x) = (2a-1) \cdot x + b$

$P(a \mid a^2 - a + 1)$ auf t_a $\Rightarrow t_a(a) = a^2 - a + 1$

$(2a-1) \cdot a + b = a^2 - a + 1$

$2a^2 - a + b = a^2 - a + 1$

$b = -a^2 + 1$

$\Rightarrow t_a(x) = (2a-1) \cdot x + (-a^2 + 1)$

9) a) zu zeigen: $W_a(2a \mid 4a^2)$ WP

$f_a'(x) = 3x^2 - 12ax + (2a + 12a^2)$

$f_a''(x) = 6x - 12a$

$f_a'''(x) = 6$

N.B.: $f_a''(x) = 0$

$6x - 12a = 0$

$6x = 12a$

$x = 2a$

H.B.: $f_a''(x) = 0 \wedge f_a'''(x) \neq 0$

$f_a'''(2a) = 6 \neq 0$ ✓

y-Wert: $f_a(2a) = (2a)^3 - 6a \cdot (2a)^2$
$+ (2a + 12a^2) \cdot 2a - 8a^3$

$= \cancel{8a^3} - 6a \cdot 4a^2 + (2a + 12a^2) \cdot 2a \cancel{- 8a^3}$

$= -24a^3 + 4a^2 + 24a^3$

$= 4a^2$

$\Rightarrow WP(2a \mid 4a^2)$ ✓ q.e.d.

b) zu zeigen: WP liegt auf $g(x)$ mit $g(x) = x^2$

$(2a)^2 = 4a^2$ ✓

c) Tangente an f durch $WP(2a \mid 4a^2)$

$t_a(x) = mx + b$

$m = f_a'(2a) = 3 \cdot (2a)^2 - 12a \cdot 2a + (2a + 12a^2)$

$= 3 \cdot 4a^2 - 24a^2 + 2a + 12a^2$

$= 12a^2 - 24a^2 + 2a + 12a^2$

$= 2a$

$\Rightarrow t_a(x) = 2a \cdot x + b$

$WP(2a \mid 4a^2)$ liegt auf $t_a \Rightarrow t_a(2a) = 4a^2$

$2a \cdot 2a + b = 4a^2$

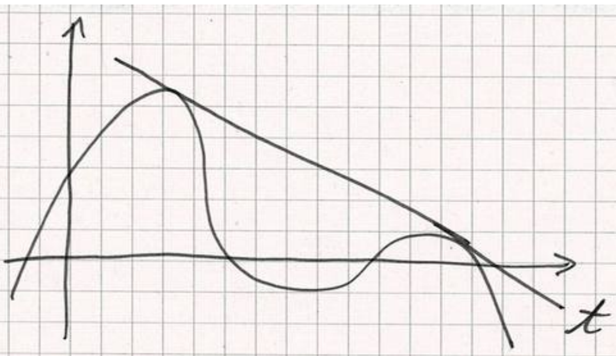
$4a^2 + b = 4a^2$

$b = 0$

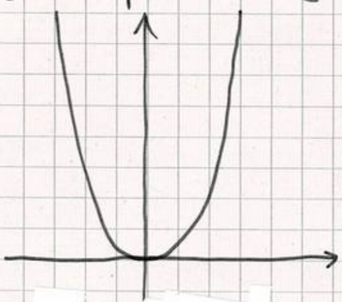
$\Rightarrow t_a(x) = 2a \cdot x$

$\Rightarrow t$ ist für jedes a eine Ursprungsgrade

10) a)

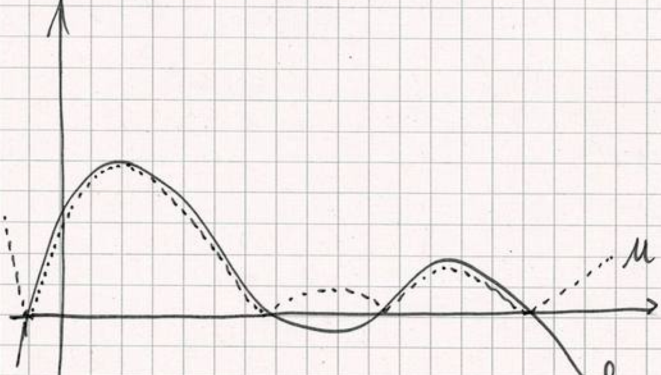


b) Man widerlegt eine Aussage über alle Elemente einer Menge, indem man ein Gegenbeispiel zeigt.
Das Gegenbeispiel ist $f(x) = x^4$



Der Graph verläuft so, dass es keinen weiteren Berührpunkt geben kann.

c)



$\sqrt{(f(x))^2} \geq 0$ für alle x

11a) $ax^6 - x^4 = 0$

$x^4 \cdot (ax^2 - 1) = 0$

$x_1 = 0 \qquad ax^2 - 1 = 0$

$ax^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{a} \qquad (a \neq 0)$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}} \qquad (a > 0)$

Es gibt mehr als eine NS, wenn $a > 0$

b) $f_a'(x) = 6ax^5 - 4x^3$

$f_a''(x) = 30ax^4 - 12x^2$

N.B.: $f_a'(x) = 0$

$6ax^5 - 4x^3 = 0$

$x^3 \cdot (6ax^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0 \qquad 6ax^2 - 4 = 0$

$\underset{\text{ist ES}}{x = 1} \Rightarrow 6a \cdot 1^2 - 4 = 0$

$6a - 4 = 0$

$6a = 4$

$a = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

H.B.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(1) = 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^2$

$= 20 - 12$

$= 8 > 0$

$\Rightarrow$ Min. ✓

12 a) Monotonie: monoton steigend bis $x = 3$ ($f' \geq 0$)
monoton fallend ab $x = 3$ ($f' \leq 0$)

streng mon. steig. für $x < 0$
und für $0 < x < 3$

streng mon. fall. für $x > 3$

Extremstellen: HP bei $x = 3$
weil: $f'(3) = 0$
und VZW von f'
(Bei $x = 0$ liegt ein Sattelpunkt vor)

Wendestellen: WS von f sind ES von f'
$\Rightarrow$ WS bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

b)