AUFGABEN (TEIL MIT HILFSMITTELN)

1) Gegeben sei die Funktionenschar
$f_a(x) = x^3 - a^2 \cdot x$

a) Bestimme die Nullstellen in Abhängigkeit von a.

b) Bestimme die Koordinaten der Extrempunkte in Abhängigkeit von a.

c) Bestimme die Funktionsgleichung der Ortslinie der Extrempunkte

d) Bestimme, ob es Punkte gibt, die auf allen Funktionen der Funktionenschar liegen.

e) Bestimme die Gleichung der Tangente an $f_a(x)$ durch $A(a / f(a))$.

f) Gegeben sei die Funktionenschar $g_b(x) = b \cdot x$, wobei a und b unabhängig voneinander sind. Bestimme die Schnittpunkte von $f_a(x)$ und $g_b(x)$.

2) (Thüringen 1995)

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Symmetrie!

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_t mit der x-Achse!

c) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen f_t?
Geben Sie eine Gleichung dieser Ortskurve an!

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

f) Die Punkte $P_1\left(t; \frac{5}{9}t^2\right)$, $P_2\left(t\sqrt{6}; 0\right)$ und $P_3\left(-t\sqrt{6}; 0\right)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion!

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximumpunkte des Graphen von f_2 schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P\left(x_p; f_2(x_p)\right)$ und $Q\left(-x_p; f_2(-x_p)\right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks ΔQPS.
Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks ΔQPS an!

3) (Bremen 2009)

Hochwasser

Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die Fließgeschwindigkeiten der Weser in $\frac{m^3}{s}$ [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.

a) Die Weser hatte zu Beginn der Messung eine Fließgeschwindigkeit von $6600\frac{m^3}{s}$. Eine Stunde nach Beginn der Messung stieg die Fließgeschwindigkeit auf ihren höchsten Wert von $9000\frac{m^3}{s}$ an.
Drei Stunden nach Beginn der Messung hatte die Weser wieder die Fließgeschwindigkeit erreicht, die sie zu Beginn der Messung hatte.
Das Wasser- und Schifffahrtsamt möchte die Fließgeschwindigkeit der Weser auf der Höhe von Bremerhaven mit Hilfe der beschriebenen Messergebnisse näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x, wobei x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $f(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x angibt.

Messungen an anderen Tagen bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden zeigten, dass sich die Fließgeschwindigkeiten der Weser durch die Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600, \quad 0 \leq x \leq 3$$

und $k \in [3550; 3600]$ beschreiben lassen.

Die Aufgabenteile b) bis e) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser sowohl zwei als auch drei Stunden nach Beginn der Messung.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert der Fließgeschwindigkeit, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

c) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von f_k bei $x_W = \frac{k}{1800}$ liegt und dass die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit $-\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600 \ \frac{m^3}{s}$ beträgt. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

d) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte (vgl. Teil c)) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen einer Funktion h liegen und geben Sie die zugehörige Funktionsvorschrift an.

e) Geben Sie die Funktion g_k an, welche die Fließgeschwindigkeit in „m^3 pro Stunde" statt in „m^3 pro Sekunde" beschreiben.

4) (Bremen 2007)

Wassergraben

Abbildung 1 zeigt den Querschnitt eines Wassergrabens mit seinen Uferlinien. Seine Böschung verläuft auf einer Seite sanft (knickfrei) von einer horizontal verlaufenden Uferlinie (Ufer$_1$) nach unten, auf der anderen Seite mit einem scharfen Knick zur Uferlinie (Ufer$_2$).
Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass sich der Querschnitt des Grabens zwischen den x-Werten -4 und 2 durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben lässt, die in $T(0|0)$ ihren Tief- und in $H(-4|3,2)$ ihren Hochpunkt hat.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht jeweils 1 m.

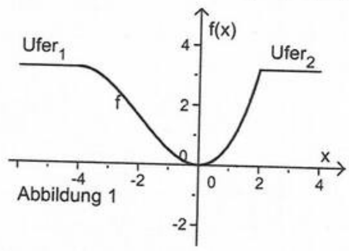

Abbildung 1

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

In Abbildung 2 blickt man aus der entgegen gesetzten Richtung auf den Querschnitt. Zwischen den x-Werten -2 und 4 beschreibt die Funktion h mit $h(x) = -0{,}1 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2$ für das hier gewählte Koordinatensystem ebenfalls den Querschnitt des Grabens ohne die Uferlinien.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht wie in a) jeweils 1 m.

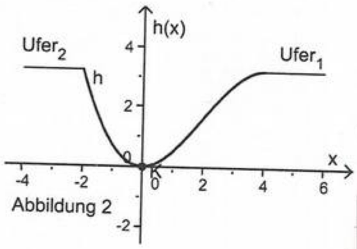

Abbildung 2

b) Skizzieren Sie, ausgehend vom Graphen von h, den Graphen der Ableitungsfunktion h' in ein neues Koordinatensystem.
Begründen Sie den Verlauf des Graphen von h' aus dem Verlauf des Graphen von h.

c) Ein Käfer befindet sich im Punkt $K(0/0)$. Er möchte aus dem Graben hinauskrabbeln. Er schafft höchstens eine Steigung von $1{,}5 = 150\%$. Kann er aus dem Graben zum Ufer$_1$ gelangen?
Begründen Sie Ihre Antwort.