AUFGABEN (HILFSMITTELFREIER TEIL)

1) Gegeben sei die Kurvenschar $f_a(x) = x^2 + a \cdot x + 4$

a) Bestimme den Wert, den man für a einsetzen muss, damit $x = 6$ eine Nullstelle der Funktion $f_a(x)$ ist.

b) Bestimme die Koordinaten des Extrempunktes in Abhängigkeit von a.

c) Bestimme eine Funktionsgleichung für die Ortslinie der Extrempunkte von Teil (b)

d) Bestimme die Gleichung der Tangente an $f_a(x)$ durch $P(1 / f(1))$ in Abhängigkeit von a.

e) Bestimme die Gleichung der Normale an $f_a(x)$ durch $P(1 / f(1))$ in Abhängigkeit von a.

f) Bestimme, ob es Punkte gibt, welche auf den Graphen aller Funktionen der Schar liegen.

g) Bestimme die Werte von a, für die gilt: $P(a / 3a^2)$ liegt auf dem Graphen von $f_a(x)$

2) Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen bzw. Funktionsscharen:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 7x$

b) $f(x) = 1 - \frac{5}{x^2} + \frac{4}{x^4}$

c) $f(x) = (x+3) \cdot (x^2 - 81)$

d) $f_a(x) = x^3 - 8ax^2$

e) $f_a(x) = x^2 - 2x + a$

f) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 4x$

3) Gegeben sei die Funktionenschar $f_{a,b}(x)$, die zwei verschiedene Parameter a und b enthält. Bestimme die Nullstellen in Abhängigkeit von a und b:

$$f_{a,b}(x) = ax^2 - bx \quad , a \in \mathbb{R}, \; b \in \mathbb{R}$$

4) Bestimme x:

a) $|x - 2| = 6$

b) $2 \cdot |3x - 2| \leq 12$

5) Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

I. $x + y + 2z = 5$
II. $2x - y + z = 1$
III. $2x + 2y - z = 5$

6) Gegeben ist eine quadratische Funktion $f(x)$, die $S(2|3)$ als Scheitelpunkt hat. Außerdem liegt $A(1|10)$ auf f. Bestimme die Funktionsgleichung.

7) Gegeben ist eine quadratische Funktionsschar $f_a(x)$, die $S(2|a)$ als Scheitelpunkt hat. Außerdem liegt $A(1|10)$ auf dem Graphen.

8) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 25)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$$f(x) = x^2 - x + 1,$$
$$g(x) = x^3 - x + 1 \quad \text{und}$$
$$h(x) = x^4 + x^2 + 1.$$

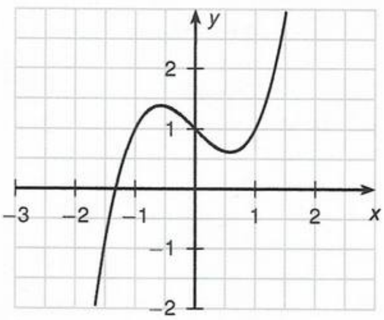


Abb. 14

a) Die Abbildung 14 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.
Geben Sie **an**, um welche Funktion es sich handelt.
Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

b) Bestimme eine Gleichung für die Schar aller Tangenten an $f(x)$.

9) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 3)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$$f_a(x) = x^3 - 6a \cdot x^2 + (2a + 12a^2) \cdot x - 8a^3,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Ihre Ableitungsfunktionen sind die Funktionen f_a' mit $f_a'(x) = 3x^2 - 12a \cdot x + (2a + 12a^2)$.
Als ganzrationale Funktion dritten Grades hat jede Funktion f_a genau einen Wendepunkt W_a.

a) Bestätigen Sie die Wendepunktkoordinaten $W_a(2a|4a^2)$.

b) Bestätigen Sie, dass jeder Wendepunkt W_a auf der Normalparabel $y = x^2$ liegt.

c) Die jeweilige Wendetangente ist die Tangente, die an den Graphen von f_a im Wendepunkt W_a angelegt wird.
Zeigen Sie, dass alle Wendetangenten Ursprungsgeraden sind.

10) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 4)

Die Abbildung 3 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades. Die Nullstellen der Funktion f sind der Reihe nach mit n_1 bis n_4 bezeichnet.

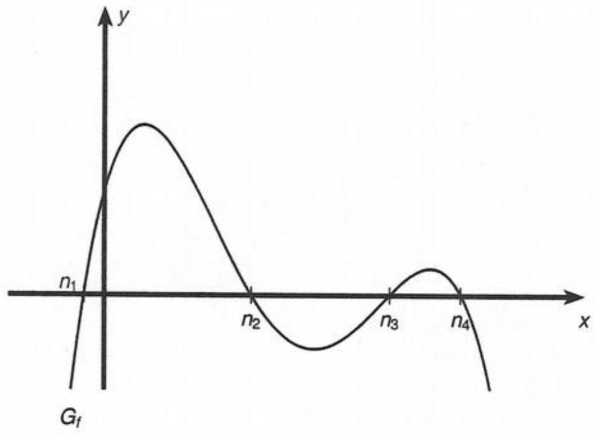


Abb. 3

a) **Zeichnen** Sie in Abbildung 3 eine Tangente ein, die G_f an zwei Stellen berührt.

b) Behauptung: Jede ganzrationale Funktion vierten Grades besitzt eine Tangente an ihren Graphen mit zwei Berührpunkten.
Widerlegen Sie die Behauptung.

c) **Skizzieren** Sie in Abbildung 4 den Graphen der Funktion u mit $u(x) = \sqrt{(f(x))^2}$.

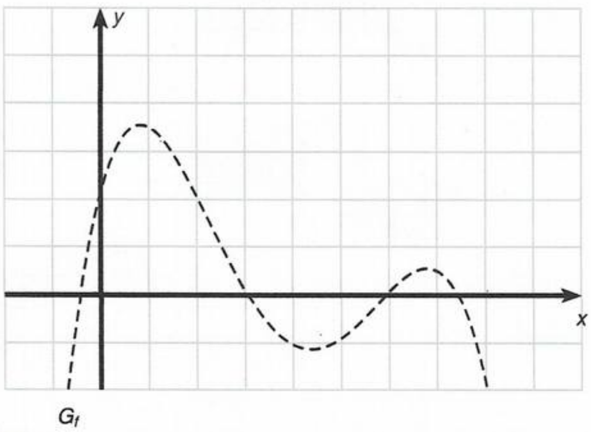


Abb. 4

11) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 26)

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) ist eine Funktion f_a durch

$$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

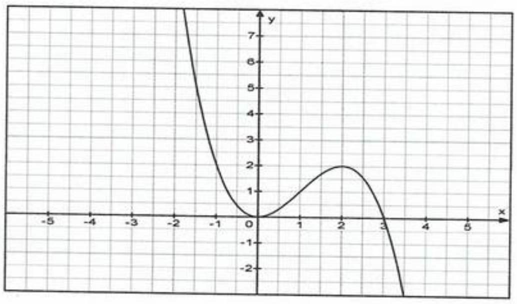
gegeben.

a) **Bestimmen** Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Bestimmen Sie diesen Wert von a.

12) (Baden Württemberg 2007)

Gegeben ist das Schaubild der Ableitung f' der Funktion f.



a) Welche Aussagen über die Funktion f ergeben sich daraus im Hinblick auf
- Monotonie
- Extremstellen
- Wendestellen ?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

b) Es gilt f(0) = 2. Skizzieren Sie das Schaubild von f.