LÖSUNGEN (TEIL 2)

1) a)

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 470 \\ 400 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 449 \\ 400 \\ 351 \end{pmatrix}$$

Es sind 449 Käufer in A, 400 in B und 351 in C.

c)

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}2325 & 0{,}535 & 0{,}2325 \\ 0{,}1075 & 0{,}295 & 0{,}5975 \end{pmatrix}$$

d)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}2857 & -0{,}142 & -0{,}142 \\ -0{,}272 & 1{,}5454 & -0{,}272 \\ -0{,}012 & -0{,}402 & 1{,}4155 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 470 \\ 400 \\ 330 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Es waren 500 Käufe in A, 400 in B und
300 in C.

e)

$$N_2 = M^{-1} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}6938 & -0{,}346 & -0{,}346 \\ -0{,}768 & 2{,}5371 & -0{,}768 \\ 0{,}0747 & -1{,}19 & 2{,}1155 \end{pmatrix}$$

f)

$$M \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}15 & -0{,}3 & 0{,}15 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & -0{,}25 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad z = r, \quad r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad y - r = 0$

$y = r$

$\Rightarrow \quad x - r = 0$

$x = r$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ r \\ r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Gesamtpopulation: 1200

$$x + y + z = 1200$$
$$3r = 1200$$
$$r = 400$$

Eine stationäre Verteilung liegt vor, wenn es jeweils 400 Käfer in A, B und C gilt.

g)

$$N_3 = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} A & B & C & \\ 0{,}83 & 0{,}22 & 0{,}475 & A \\ 0{,}17 & 0{,}78 & 0{,}525 & B \end{array}$$

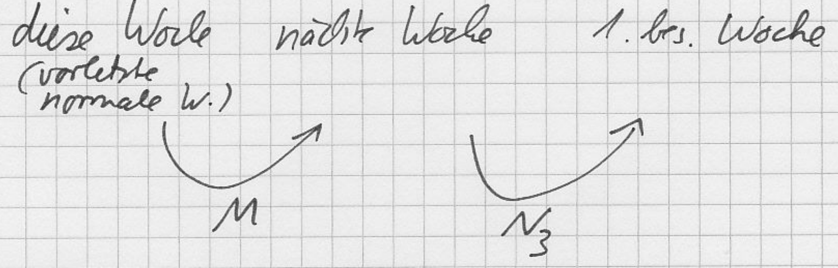
h)

	diese Woche	nächste Woche	übern. Woche (erste bes. Woche)
A	470	449	627
B	400	400	573
C	330	351	/

$$\begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}22 & 0{,}475 \\ 0{,}17 & 0{,}78 & 0{,}525 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 449 \\ 400 \\ 351 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 627{,}395 \\ 572{,}605 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 627 \\ 573 \end{pmatrix}$$

Es sind 627 in A und 573 in B.

i)

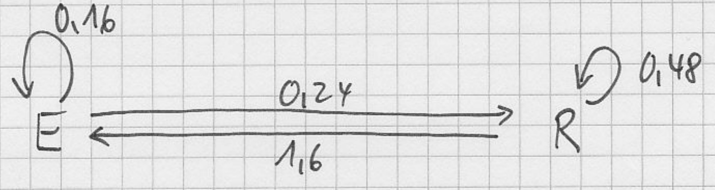


$$N_4 = N_3 \cdot M$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}83 & 0{,}22 & 0{,}475 \\ 0{,}17 & 0{,}78 & 0{,}525 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}7207 & 0{,}1332 & 0{,}4722 \\ 0{,}2792 & 0{,}668 & 0{,}5277 \end{pmatrix}$$

2) a)



b) $$\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 528 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{V_2} = \begin{pmatrix} 1120 \\ 528 \end{pmatrix}$$

c) Es wird mehr Reptilien geben, da sich 24% der vorhandenen Eier zu Reptilien weiterentwickeln. In diesem Fall würde man 24% einer größeren Grundmenge nehmen: 24% von 1100 sind mehr als 24% von 1000.

Es wird auch mehr Eier geben, da 16% der vorhandenen Eier in diesem Zustand bleiben.

d) $$\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_2 \\ 576 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0{,}24 e_1 + 0{,}48 \cdot 600 &= 576 \\ 0{,}24 e_1 + 288 &= 576 \\ 0{,}24 e_1 &= 288 \\ \underline{e_1} &\underline{= 1200} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0{,}16 e_1 + 1{,}6 \cdot 600 &= e_2 \\ 0{,}16 \cdot 1200 + 960 &= e_2 \\ \underline{1152} &\underline{= e_2} \end{aligned}$$

Zwischen der 1. und der 2. Zählung wurden 1152 Eier gelegt.

e) $\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ 0{,}24 & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_0 \\ r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1200 \\ 600 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}16 & 1{,}6 & 1200 \\ 0{,}24 & 0{,}48 & 600 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$e_0 = 1250$
$r_0 = 625$

$\Rightarrow \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1250 \\ 625 \end{pmatrix}$

f) Graph II ist korrekt.

Graph I zeigt eine lineare statt einer exponentiellen Abnahme.
Graph III zeigt einen Bestand, der zeitweise wächst, obwohl er ständig abnehmen müsste.

g) $\begin{pmatrix} 0{,}16 & 1{,}6 \\ u & 0{,}48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

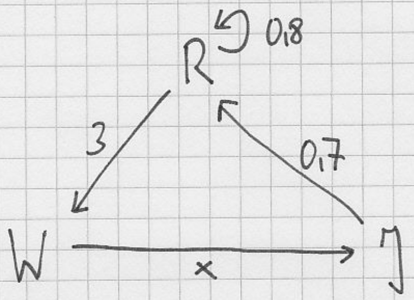
$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}84 & 1{,}6 & 0 \\ u & -0{,}52 & 0 \end{array}\right) u \cdot \mathrm{I} + 0{,}84 \cdot \mathrm{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}84 & 1{,}6 & 0 \\ 0 & 1{,}6u - 0{,}4368 & 0 \end{array}\right)$$

Es muss gelten: $1{,}6u - 0{,}4368 = 0$

$$1{,}6u - 0{,}4368 = 0$$
$$1{,}6u = 0{,}4368$$
$$\underline{u = 0{,}273}$$

3) a)



b) x gibt den Anteil der Welpen an, die sich zu Jungtieren weiterentwickeln.

c) 72 % sterben ≙ 28 % überleben

Jahr 1 Jahr 2

$$W \xrightarrow[100x\,\%]{x} J \xrightarrow[70\,\%]{0{,}7} R$$

$$x \cdot 0{,}7 = 0{,}28$$
$$x = 0{,}4$$

d) $R_{neu} = 0{,}8 \cdot R_{alt} + 0{,}7 \cdot J_{alt}$

$$55 = 0{,}8 \cdot 39 + 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$55 = 31{,}2 + 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$23{,}8 = 0{,}7 \cdot J_{alt}$$
$$\underline{34 = J_{alt}}$$

Hinweis: $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_{alt} \\ j_{alt} \\ 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{neu} \\ j_{neu} \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 39 \\ 0{,}4 \cdot w_{alt} \\ 0{,}7 \cdot j_{alt} + 0{,}8 \cdot 39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{neu} \\ j_{neu} \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0{,}7 \cdot j_{alt} + 0{,}8 \cdot 39 = 55$$

(...)

e) $$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3{,}75 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0{,}24 & 0{,}45 & 0{,}56 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 173 \\ 165 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1137{,}75 \\ 330 \\ 314{,}25 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1138 \\ 330 \\ 314 \end{pmatrix}$$

Es sind 1138 Welpen, 330 Junge + 314 Rudelführerinnen

f) $$1{,}38^2 \cdot \begin{pmatrix} 2168 \\ 629 \\ 598 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4126 \\ 1195 \\ 1138 \end{pmatrix}$$

g) Nach diesem Modell wächst die Population alle 2 Jahre um 38%. Damit würde die Population ungebremst immer weiter wachsen. Das ist unrealistisch, da die Nahrungsreserven im Gebiet irgendwann erschöpft sein müssen.

4) a)
$$(N \cdot N^{-1}) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$$
$$E \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} = a \cdot \vec{u}$$
$$\Rightarrow a = 1$$

Für alle Matrizen M gilt:
$M \cdot M^{-1} = E$ mit E: Einheitsmatrix.
Die Multiplikation der Einheitsmatrix mit einem Vektor ändert diesen nicht.

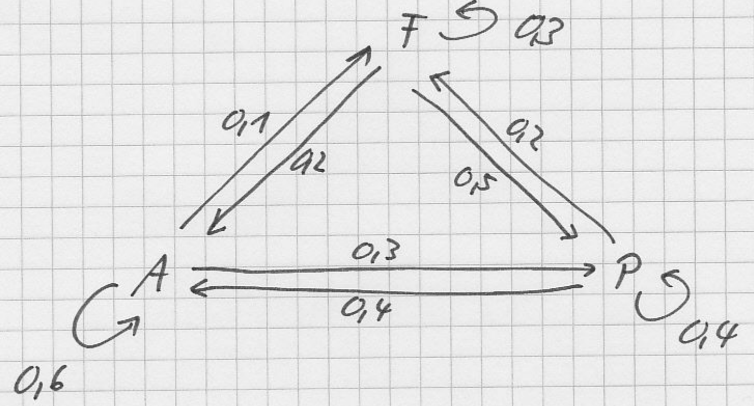
b)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0{,}25 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4u_3 \\ 0{,}25\, u_1 \\ 0{,}4\, u_2 + 0{,}6\, u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow 0{,}4\, u_2 + 0{,}6\, u_3 = u_3 \quad \Big| -0{,}6\, u_3$$
$$0{,}4\, u_2 = 0{,}4\, u_3 \quad \Big| :0{,}4$$
$$u_2 = u_3$$

Diese Bedingung erfüllt auch die beiden oberen Gleichungen:

I. $4u_3 = u_1$
$4u_2 = u_1$

II. $0{,}25\, u_1 = u_2$
$0{,}25 \cdot (4u_2) = u_2$
$u_2 = u_2$ ✓

5) a)



b) 400 Personen ⟶ $1/4$ abwesend: 100 Fehlende

⟶ $1/10$ de Anwesenden aktiv (also 10% von 300): 30 Aktive

⟶ 270 Passive

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 270 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 146 \\ 167 \\ 87 \end{pmatrix}$$

Es sind 146 Aktive, 167 Passive und 87 Fehlende.

c)

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ p \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ p \\ f \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}3 & -0{,}6 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}7 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -8/3 & 0 \\ 0 & 1 & -13/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad f = r, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad p - \frac{13}{6} r = 0$$

$$p = \frac{13}{6} r$$

$$\Rightarrow \quad a - \frac{8}{3} r = 0$$

$$a = \frac{8}{3} r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 8/3\, r \\ 13/6\, r \\ r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Gesamtpopulation: 400

$$f + p + a = 400$$

$$r + \frac{13}{6} r + \frac{8}{3} r = 400$$

$$\frac{35}{6} r = 400$$

$$r = \frac{480}{7} \approx 68{,}57$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{8}{3} \cdot \frac{480}{7} = \frac{1280}{7} \approx 182{,}86 \approx 183$$

$$p = \frac{13}{6} \cdot \frac{480}{7} = \frac{1040}{7} \approx 148{,}57 \approx 149$$

$$f = \frac{480}{7} \approx 68{,}57 \approx 69$$

Es ergeben sich keine glatten Werte (daher kein realistische Wert mit exakter Reproduktion), aber ungefähre: 183 Aktive, 149 Passive und 69 Fehlende.

d)
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0 & 1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot \text{II} - \text{I} \\ 6 \cdot \text{III} - \text{I} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 1{,}6 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot \text{II} - \text{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}8 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \end{array}\right)$$

↯

Es gilt keine inverse Matrix

e)
$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-40 \\ 440-2t \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}6 \cdot (t-40) + 0{,}4 \cdot (440-2t) + 0{,}2\,t \\ 0{,}3 \cdot (t-40) + 0{,}4 \cdot (440-2t) + 0{,}5\,t \\ 0{,}1 \cdot (t-40) + 0{,}2 \cdot (440-2t) + 0{,}3\,t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}6\,t - 24 + 176 - 0{,}8\,t + 0{,}2\,t \\ 0{,}3\,t - 12 + 176 - 0{,}8\,t + 0{,}5\,t \\ 0{,}1\,t - 4 + 88 - 0{,}4\,t + 0{,}3\,t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 152 \\ 164 \\ 84 \end{pmatrix}$$

Es gilt: $t \geq 0$ (sonst hätte man eine negative Anzahl)

Außerdem gilt es maximal 400 Personen.
Daher gilt:

$$t - 40 \leq 400 \qquad\qquad 440 - 2t \leq 400$$
$$t \leq 440 \qquad\qquad -2t \leq -40$$
$$t \geq 20$$

$$\Rightarrow \quad 20 \leq t \leq 440$$

f) Rechnerisch tragen 60% der Anzahl der Aktiven einer Vorlesung zu der Anzahl der Aktiven in der nächsten Vorlesung bei (Eintrag 0,6). Die im Aufgabentext zu beurteilende Interpretation ist aber nicht ganz richtig, da das Modell nur eine Entwicklung von *Anzahlen* beschreibt, ohne sich auf einzelne *Personen* zu beziehen. Die Interpretation liefert zwar eine mögliche Erklärung für das Zustandekommen des Prozentsatzes, aber nicht die einzig mögliche; unter den regelmäßig Aktiven könnte es z. B. auch welche geben, die sich verabreden, abwechselnd in die Vorlesung zu gehen und zu fehlen, weil sie sich außerhalb der Vorlesung treffen und ihr Wissen austauschen. So ein regelmäßiger Tausch würde sich auf die Entwicklung der Anzahlen nicht auswirken, aber der Interpretation widersprechen.