LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

6a) ① gesucht: Maximum

$f'(x) = -0{,}3x^2 + x$

$f''(x) = -0{,}6x + 1$

N.B.: $f'(x) = 0$

$-0{,}3x^2 + x = 0$

$x(-0{,}3x + 1) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{1}{0{,}3} = 3{,}\overline{3}$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 1 \Rightarrow TP$

$f''(3{,}\overline{3}) = -1 \Rightarrow HP$

Ränder: $f(-1) = 4{,}2$

$f(3{,}\overline{3}) = 5{,}45$

$f(5) \approx 3{,}6$

$\Rightarrow$ höchste Punkt $H(3{,}\overline{3} / 5{,}45)$

(II) Breite des Sees

Der Tiefpunkt muss der tiefste Punkt des Sees sein.

Es gilt: $TP(0/3{,}6)$

Man kann f mit dem GTR zeichnen und dann mit dem MIN-Befehl den Tiefpunkt anzeigen lassen

Der See ist 10 m tief, also liegt das Ufer bei $y = 3{,}7$ Höhe

Um die Breite zu ermitteln, suchen wir die x-Werte mit $f(x)=3{,}7$
Beim GTR zeichnen wir den Graphen von f und bestimmen dann mit X-CAL die passenden x-Werte

$\Rightarrow \quad x_1 = -0{,}429 \approx -0{,}43$

$x_2 = 0{,}4698 \approx 0{,}47$

$x_3 = 4{,}959$

Da der See westlich (links) vom Maximum ist, kommen nur x_1 und x_2 in Frage.

$\Rightarrow$ Breite $= 0{,}43 + 0{,}47 = 0{,}9$

$\Rightarrow$ Breite: 90 m

(III) steilste Stelle ≙ Wendestelle (Maximum von f')

$f''(x) = -0{,}6x + 1$

$f'''(x) = -0{,}6$

N.B: $f''(x) = 0$

$-0{,}6x + 1 = 0$

$x = 1{,}\overline{6}$

H.B.: $f''(x)=0$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(1{,}\overline{6}) = -0{,}6 < 0$

$\Rightarrow$ Max. der Ableitung

Ränder: $f'(0{,}47) = 0{,}40373$

$f'(1{,}\overline{6}) = 0{,}8\overline{3}$

$f'(3{,}\overline{3}) = 0$

Für den Winkel gilt:

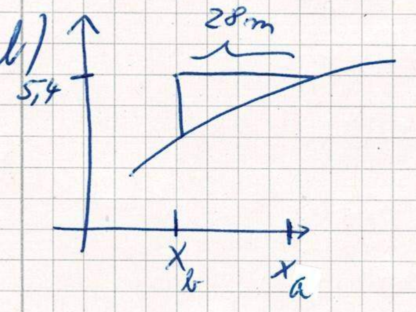
$\tan \alpha = f'(x)$

$\tan \alpha = 0{,}8\overline{3}$

$\alpha = \tan^{-1}(0{,}8\overline{3}) \approx 39{,}8°$

$\Rightarrow$ Dort besteht Lawinengefahr.

b)



Bestimmung von x_a:

$f(x_a) = 5{,}4$

$-0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6 = 5{,}4$

GTR...

$x_1 = -1{,}65$ (westl. vom See)

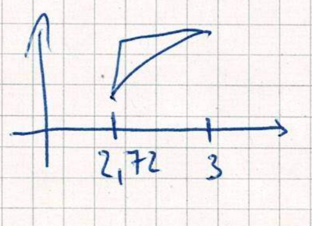
$x_2 = 3$

$x_3 = 3{,}65$ (östl. vom Gipfel)

$\Rightarrow x_a = 3$

Bestimmung von x_b:

$3 - 0{,}28 = 2{,}72$



$$A = \int_{2{,}72}^{3} 5{,}4 - f(x)\ dx$$

$$= \int_{2{,}72}^{3} 5{,}4 - (-0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6)\ dx$$

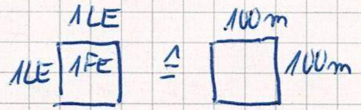
$$= \int_{2{,}72}^{3} 5{,}4 + 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 - 3{,}6\ dx$$

$$= \int_{2{,}72}^{3} 0{,}1x^3 - 0{,}5x^2 + 1{,}8\ dx$$

$$= \left[\frac{1}{40}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 1{,}8x\right]_{2{,}72}^{3}$$

$$= 0{,}0145 \text{ FE}$$

$1 \text{ FE} = 10.000\ m^2$



$A = 100 \cdot 100\ m^2$

$\Rightarrow A = 145\ m^2$

$\Rightarrow$ Es sind mehr als $130\ m^2$

c) 1 $g(x) = ax^2 + bx + c$

$g'(x) = 2ax + b$

Knickfrei bei $x = 5$ $\Rightarrow$ $g(5) = f(5) = 3{,}6$

$g'(5) = f'(5) = -2{,}5$

Scheitel bei $x = 6$ $\Rightarrow$ $g'(6) = 0$

$g(5) = 3{,}6 \Rightarrow 25a + 5b + c = 3{,}6$
$g'(5) = -2{,}5 \Rightarrow 10a + b = -2{,}5$
$g'(6) = 0 \Rightarrow 12a + b = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 25 & 5 & 1 & 3{,}6 \\ 10 & 1 & 0 & -2{,}5 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

GTR...

$a = 1{,}25$
$b = -15$
$c = 47{,}35$

$\Rightarrow g(x) = 1{,}25x^2 - 15x + 47{,}35$

H.B.: $g'(x) = 2{,}5x - 15$
$g''(x) = 2{,}5$
$g''(6) = 2{,}5 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = 6$ ✓

(11) Höhe des Punktes:

$g(6) = 2{,}35$

Es sind 235 m.

7 a) $s(t) = 16e^{-0,5t} - 14e^{-t} - 2$
$s'(t) = -8e^{-0,5t} + 14e^{-t}$
$s''(t) = 4e^{-0,5t} - 14e^{-t}$

(I) ges.: Maximum
N.B.: $s'(t) = 0$
$-8e^{-0,5t} + 14e^{-t} = 0$
GTR...
$t \approx 1,12$
H.B.: $s'(t) = 0$ und $s''(t) \neq 0$
$s''(1,12) = -2,28 < 0$
$\Rightarrow$ HP bei $t = 1,12$
Ränder: $s(0) = 0$
$s(1,12) = 2,57$
$s(12) = -1,96$
$\Rightarrow$ maximale Änderungsrate: 2,57 cm/h

(II) Ich zeichne den Graphen von s mit dem GTR und lasse mir mit X-CALC alle Punkte anzeigen, für die $s(t) = 2$ gilt.

$\Rightarrow t_1 \approx 0,51$
$t_2 \approx 1,99$
Am Graphen kann man sehen, dass die Bedingung für $0,51 \leq t \leq 1,99$ erfüllt ist.
$\Rightarrow$ Von ca. 10:30 Uhr bis ca. 12 Uhr

(III) 12 Uhr $\hat{=}$ $t = 2$

Um 10 Uhr beträgt die Höhe 150 cm

Die Veränderung von 10 bis 12 Uhr lässt sich mit $\int_0^2 f(t)\,dt$ bestimmen:

$$\int_0^2 s(t)\,dt = 4{,}12 \text{ cm}$$

(Da der Operator „Bestimmen" verwendet wird, muss die Stammfunktion nicht bestimmt werden)

$\Rightarrow$ Höhe: 154,12 cm

b) ① Stammfunktion S von s:

$$S(t) = \frac{16}{-0{,}5} e^{-0{,}5t} - \frac{14}{-1} e^{-t} - 2t + c$$

$$= -32 e^{-0{,}5t} + 14 e^{-t} - 2t + c$$

Es gilt: $S(0) = 150$

$$\Rightarrow -32 \cdot e^0 + 14 \cdot e^0 - 2 \cdot 0 + c = 150$$

$$-32 + 14 + c = 150$$

$$c = 168$$

$\Rightarrow$ Schneehöhe:

$$S(t) = -32 e^{-0{,}5t} + 14 \cdot e^{-t} - 2t + 168$$

② Ich zeichne $S(t)$ mit dem GTR und suche die t-Werte, für die $S(t) = 153$ gilt mit X-CAL.

$\Rightarrow$ $t_1 = -0{,}797\ldots \approx -0{,}8$ (außerhalb Def.bereich)

$t_2 = 1{,}496\ldots \approx 1{,}5$

$t_3 = 7{,}03$

⇒ Um ca. 11:30 Uhr und um ca. 17 Uhr.

c) ① $s_{neu}(t) = s(t) + 1$
$= 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2 + 1$
$= 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 1$

Die Schneehöhe nimmt zu, wenn $s(t)$ bzw. $s_{neu}(t)$ größer als 0 ist
⇒ Wir berechnen die NS

$s(t) = 0$
$16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2 = 0$
GTR...
$t_1 = 0$
$t_2 = 3{,}89$

$s_{neu}(t) = 0$
$16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 1 = 0$
GTR...
$t_1 = -0{,}14$ (außerhalb Def.b)
$t_2 = 5{,}42$

Verlängerung: $5{,}42 - 3{,}89 = 1{,}53$ h
$= 1$ h 32 min

⑪ Ohne Schneekanonen ist die Höhe um 18 Uhr gleich $S(8) = 151{,}42$ cm
Es sollen 8,58 cm mehr sein innerhalb von $5\frac{1}{2}$ h

⇒ zusätzl. Schnee: $\frac{8{,}58}{5{,}5} = 1{,}56$

⇒ 1,56 cm pro h

8) <u>5.1.</u>

① Extrempunkte:

$$f_a'(x) = e^{-ax} + x \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$$
$$= e^{-ax} - ax\,e^{-ax}$$
$$= (-ax+1) \cdot e^{-ax}$$

$$f_a''(x) = -a \cdot e^{-ax} + (-ax+1) \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$$
$$= -a\,e^{-ax} + (a^2x - a) \cdot e^{-ax}$$
$$= (a^2x - 2a) \cdot e^{-ax}$$

N.B.: $f_a'(x) = 0$

$$(-ax+1) \cdot e^{-ax} = 0$$
$$-ax+1 = 0 \quad \text{oder} \quad e^{-ax} = 0$$
$$ax = 1 \qquad\qquad \lightning$$
$$x = \frac{1}{a}$$

H.B.: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$$f_a''\left(\frac{1}{a}\right) = \left(a^2 \cdot \frac{1}{a} - 2a\right) \cdot e^{-a \cdot \frac{1}{a}}$$
$$= (a - 2a) \cdot e^{-1}$$
$$= -a \cdot e^{-1} < 0$$
$$\Rightarrow HP$$

y-Wert: $f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{1}{a}}$

$$= \frac{1}{a} \cdot e^{-1}$$
$$= \frac{1}{ae}$$

$$\Rightarrow HP\left(\frac{1}{a} \,\middle|\, \frac{1}{ae}\right)$$

(II) Wendepunkte

$$f_a'''(x) = a^2 \cdot e^{-ax} + (a^2x - 2a) \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$$
$$= a^2 e^{-ax} + (-a^3x + 2a^2) \cdot e^{-ax}$$
$$= (-a^3x + 3a^2) \cdot e^{-ax}$$

N.B.: $f_a''(x) = 0$

$$(a^2x - 2a) \cdot e^{-ax} = 0$$
$$a^2x - 2a = 0 \text{ oder } e^{-ax} = 0$$
$$a^2x = 2a \qquad \lightning$$
$$x = \frac{2a}{a^2}$$
$$x = \frac{2}{a}$$

H.B.: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$

$$f_a'''\left(\frac{2}{a}\right) = \left(-a^3 \cdot \frac{2}{a} + 3a^2\right) \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}}$$
$$= (-2a^2 + 3a^2) \cdot e^{-2}$$
$$= a^2 \cdot e^{-2} \neq 0$$

y-Wert:

$$f_a\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}} = \frac{2}{a} \cdot e^{-2} = \frac{2}{ae^2}$$

(III) (siehe GTR)

5.2.

Anstieg von f_a <=> Ableitung

$$f_a'(0) = (-a \cdot 0 + 1) \cdot e^{-a \cdot 0} = 1 \cdot e^0 = 1$$

=> unabh. von a

5.3.

(I) zu zeigen: $F_a'(x) = f_a(x)$

$$F_a(x) = (x + \frac{1}{a}) \cdot \frac{-1}{a} e^{-ax}$$

$$F_a'(x) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-ax}\right) + (x + \frac{1}{a}) \cdot \frac{-1}{a} \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$$

$$= \left(-\frac{1}{a} \cdot e^{-ax}\right) + (x + \frac{1}{a}) \cdot e^{-ax}$$

$$= \left(-\frac{1}{a} + x + \frac{1}{a}\right) \cdot e^{-ax}$$

$$= x \cdot e^{-ax} \quad \checkmark$$

(II) Nullstellen von $f_a(x)$:

$$f_a(x) = 0$$

$$x \cdot e^{-ax} = 0$$

$$x = 0$$

Fläche bis $x = z$: (liegt oberhalb der x-Achse)

$$A = \int_0^z f_a(x)\,dx$$

$$= \left[F_a(x)\right]_0^z$$

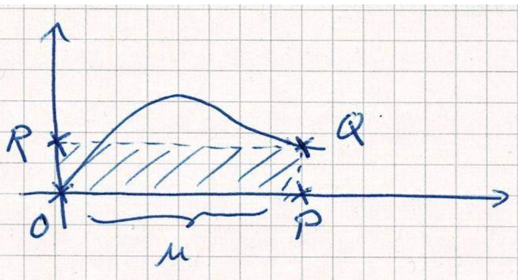
$$= -\frac{1}{a} \cdot e^{-az} \cdot (z + \frac{1}{a}) - \left(-\frac{1}{a} \cdot e^0 \cdot (0 + \frac{1}{a})\right)$$

$$= -\frac{1}{a} \cdot e^{-az} \cdot (z + \frac{1}{a}) - \left(-\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}\right)$$

$$= -\frac{1}{a} e^{-az} \cdot (z + \frac{1}{a}) + \frac{1}{a^2}$$

$$\lim_{z \to \infty} A = \lim_{z \to \infty} \left(\underbrace{-\frac{1}{a} e^{-az} \cdot (z + \frac{1}{a})}_{\text{geht gegen } 0} + \frac{1}{a^2} \right) = \frac{1}{a^2}$$

5.4.



$$A_\square = u \cdot f_a(u)$$
$$= u \cdot u \cdot e^{-au}$$
$$A(u) = u^2 \cdot e^{-au}$$

gesucht: Maximum von $A(u)$

N.B.: $A'(u) = 0$

$$A'(u) = 2u \cdot e^{-au} + u^2 \cdot (-a) \cdot e^{-au}$$
$$= 2u e^{-au} - a u^2 e^{-au}$$
$$= (-au^2 + 2u) \cdot e^{-au}$$
$$A''(u) = (-2au + 2) \cdot e^{-au} + (-au^2 + 2u) \cdot (-a) \cdot e^{-au}$$
$$= (-2au + 2) \cdot e^{-au} + (a^2u^2 - 2au) \cdot e^{-au}$$
$$= (a^2u^2 - 4au + 2) \cdot e^{-au}$$

$$(-au^2 + 2u) \cdot e^{-au} = 0$$
$$-au^2 + 2u = 0 \quad \text{oder} \quad e^{-au} = 0$$
$$\text{ɛ}$$
$$au^2 = 2u \quad | : u \quad (u \neq 0)$$
$$au = 2$$
$$u = \frac{2}{a}$$

H.B.: $A'(u) = 0$ und $A''(u) \neq 0$

$$A''\left(\frac{2}{a}\right) = \left(a^2 \cdot \frac{4}{a^2} - 4a \cdot \frac{2}{a} + 2\right) \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}}$$
$$= (4 - 8 + 2) \cdot e^{-2}$$
$$= -2 \cdot e^{-2} < 0$$
$$\Rightarrow \text{HP bei } u = \frac{2}{a}$$

Ränder: einzige ES ✓

y-Wert von Q: $f_a\left(\frac{2}{a}\right) = \frac{2}{ae^2}$

$\Rightarrow Q\left(\frac{2}{a} \middle/ \frac{2}{ae^2}\right)$

9a) (I) Nullstelle

$(x+a) \cdot e^{b-x} = 0$

$x + a = 0$ oder $e^{b-x} = 0$

$x = -a$ $\quad$ $\lightning$

(II) Extrempunkt

$f'_{a,b}(x) = 1 \cdot e^{b-x} + (x+a) \cdot (-1) \cdot e^{b-x}$

$= e^{b-x} + (-x-a) \cdot e^{b-x}$

$= (-x-a+1) \cdot e^{b-x}$

$f''_{a,b}(x) = -1 \cdot e^{b-x} + (-x-a+1) \cdot (-1) \cdot e^{b-x}$

$= -e^{b-x} + (x+a-1) \cdot e^{b-x}$

$= (x+a-2) \cdot e^{b-x}$

N.B.: $f'_{a,b}(x) = 0$

$(-x-a+1) \cdot e^{b-x} = 0$

$-x-a+1 = 0$ oder $e^{b-x} = 0$

$x = -a+1$ $\quad$ $\lightning$

H.B.: $f'_{a,b}(x) = 0$ und $f''_{a,b}(x) \neq 0$

$f''_{a,b}(-a+1) = (-a+1+a-2) \cdot e^{b+a-1}$

$= -1 \cdot e^{b+a-1} < 0$

$\Rightarrow$ HP

y-Wert: $f_{a,b}(-a+1) = (-a+1+a)\cdot e^{b+a-1}$
$= e^{b+a-1}$

$\Rightarrow HP(-a+1 / e^{b+a-1})$

(III) Wendepunkt

N.B.: $f_{a,b}''(x) = 0$
$(x+a-2)\cdot e^{b-x} = 0$
$x+a-2 = 0$ oder $e^{b-x} = 0$
$x = -a+2$ $\quad$ $\lightning$

H.B.: $f_{a,b}''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$
$f_{a,b}'''(x) = e^{b-x} + (-x-a+2)\,e^{b-x}$
$= (-x-a+3)\cdot e^{b-x}$
$f_{a,b}'''(-a+2) = (a-2-a+3)\cdot e^{b+a-2}$
$= e^{b+a-2} > 0$
$\Rightarrow$ WS

y-Wert:
$f_{a,b}(-a+2) = (-a+2+a)\cdot e^{b+a-2}$
$= 2e^{b+a-2}$
$\Rightarrow WP(-a+2 / 2e^{b+a-2})$

b) (I) höchste Stelle auf y-Achse
$\Rightarrow$ Maximum bei $x=0$
$\Rightarrow -a+1 = 0$
$a = 1$
$\Rightarrow f_b(x) = (x+1)\cdot e^{b-x}$

Höhe des Deiches (der höchsten Stelle): 3,5m
$\Rightarrow f_b(0) = 3{,}5$

$\Rightarrow \quad e^{b+1-1} = 3,5$

$e^{b} = 3,5$

$b = \ln(3,5)$

$\Rightarrow f(x) = (x+1) \cdot e^{\ln 3,5 - x}$

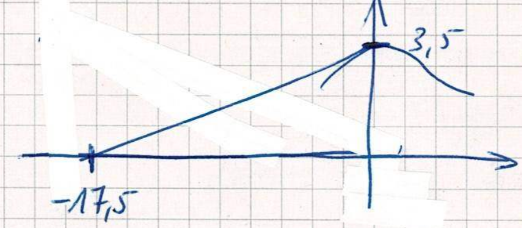
(II) WP$\left(-1+2 \mid 2e^{\ln 3,5+1-2}\right)$

WP$\left(1 \mid 2e^{\ln 3,5-1}\right)$

HP$(0 \mid 3,5)$

(III) Skizze: vgl. GTR

c)



(I) Gleichung von g:

Achsenabschnitt 3,5

$\Rightarrow g(x) = ax + 3,5$

$A(-17,5/0)$ auf g $\Rightarrow g(-17,5) = 0$

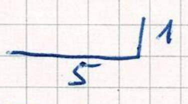
$-17,5a + 3,5 = 0$

$17,5a = 3,5$

$a = 0,2$

$\Rightarrow g(x) = 0,2x + 3,5$

(II) Steigung:



1 : 5 ✓

d) $h(x) = -\frac{1}{7}x + b$

Beginn: Wendepunkt WP

$WP(1 | 2 \cdot e^{\ln 3,5 - 1})$

$WP(1 | \approx 2,58)$

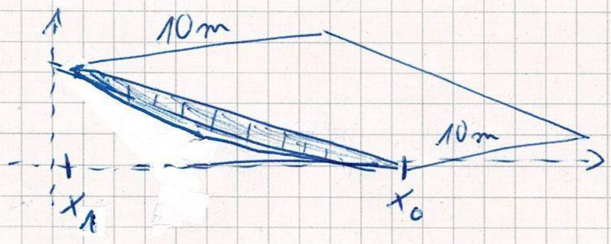
$WP(1|2,58)$ auf $h \Rightarrow h(1) = 2,58$

$-\frac{1}{7} + b = 2,58$

$b \approx 2,72$

$\Rightarrow h(x) = -\frac{1}{7}x + 2,72$

e)



Bestimmung von x_0 und x_1:

zu x_0: $h(x) = 0$

$-\frac{1}{7}x + 2,72 = 0$

$x = 19,04 \text{ m}$

zu x_1: $x_1 = 1$ (vom WP aus)

$$A_{\text{Querschnitt}} = \int_1^{19,04} h(x) - f(x)$$

$$= 19,38$$

$V = 19,38 \text{ m}^2 \cdot 10 = 193,8 \text{ m}^3$

$\Rightarrow$ Es sind $193,8 \text{ m}^3$.