LÖSUNGEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $x^2+2x-8=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+8}$

$x=-1\pm\sqrt{9}$

$x=-1\pm 3$

$x_1=-4$

$x_2=2$

b) $\frac{1}{2}x^2+x-1{,}5=0 \quad |\cdot 2$

$x^2+2x-3=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+3}$

$x=-1\pm\sqrt{4}$

$x=-1\pm 2$

$x_1=-3$

$x_2=1$

c) $x^3-9x=0$

$x\cdot(x^2-9)=0$

$x_1=0 \qquad x^2-9=0$

$x^2=9 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2=3$

$x_3=-3$

d) $x^4-2x^2+1=0 \quad |\, x^2=z$

$z^2-2z+1=0$

$z=1\pm\sqrt{1-1}$

$z=1 \quad |\, z=x^2$

$x^2=1 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1=1$

$x_2=-1$

e) $x^6 - 4x^3 + 4 = 0 \quad | x^3 = z$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$z = 2 \quad | z = x^3$

$x^3 = 2 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x = + \sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt{x+1} = 0 \quad | ()^2$

$x + 1 = 0 \quad | -1$

$x = -1$

g) $\frac{x+2}{x} = 0 \quad | \cdot x$

$x + 2 = 0 \quad | -2$

$x = -2$

h) $x^5 + 2x^3 - 3x = 0$

$x \cdot (x^4 + 2x^2 - 3) = 0$

$x = 0$ oder $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 + 2z - 3 = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$z = -1 \pm \sqrt{4}$

$z = -1 \pm 2$

$z_1 = -3$

$z_2 = 1 \quad | z = x^2$

$x^2 = -3$ oder $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$\lightning$ $\quad x_2 = 1$

$x_3 = -1$

i) $(2x^2-50)\cdot(x+3)=0$

$2x^2-50=0$ oder $x+3=0$

$2x^2=50$ $\quad$ $x=-3$

$x^2=25 \quad |\sqrt{}$ $\quad$ $x_1=-3$

$x_2=5$

$x_3=-5$

j) $\sqrt{x+1}-2=0 \quad |+2$

$\sqrt{x+1}=2 \quad |()^2$

$x+1=4 \quad |-1$

$x=3$

k) $(x+7)\cdot e^{2x}=0$

$x+7=0$ oder $e^{2x}=0$

$x=-7$ $\quad$ ↯

l) $(x^2-2x+1)\cdot e^{4x}=0$

$x^2-2x+1=0$ oder $e^{4x}=0$

$x=1\pm\sqrt{1-1}$ $\quad$ ↯

$x=1$

m) $e^{2x}-2e^x-8=0 \quad |e^x=z$

$z^2-2z-8=0$

$z=1\pm\sqrt{1+8}$

$z=1\pm\sqrt{9}$

$z=1\pm3$

$z_1=4$ $\quad$ $|z=e^x$

$z_2=-2$

$e^x = 4 \quad | \ln$ | $e^x = -2$

$x = \ln(4)$ | $\lightning$

n) $(x^3 - 2x) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$

$x^3 - 2x = 0$ oder $e^{2x} - 5 = 0$

$x(x^2 - 2) = 0$ oder $e^{2x} - 5 = 0$

$x = 0$ oder $x^2 - 2 = 0$ oder $e^{2x} - 5 = 0$

$x_1 = 0$ | $x^2 = 2$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$ | $e^{2x} = 5 \quad | \ln$, $2x = \ln(5) \quad | :2$, $x_4 = \frac{\ln(5)}{2}$

o) $2e^x - 6 = 0$

$2e^x = 6 \quad | :2$

$e^x = 3 \quad | \ln$

$x = \ln(3)$

2a) $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot e^{2x} = 6e^{2x}$

b) $f'(x) = (x+2)' \cdot e^{2x} + (x+2) \cdot (e^{2x})'$

$= 1 \cdot e^{2x} + (x+2) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= e^{2x} + (2x+4) \cdot e^{2x}$

$= (2x+5) \cdot e^{2x}$

c) $f'(x) = (3x+4)' \cdot e^{-3x} + (3x+4) \cdot (e^{-3x})'$
$= 3e^{-3x} + (3x+4) \cdot (-3) \cdot e^{-3x}$
$= 3e^{-3x} + (-9x-12) \cdot e^{-3x}$
$= (-9x-9) \cdot e^{-3x}$

d) $f'(x) = (x^2+2)' \cdot e^{-2x} + (x^2+2) \cdot (e^{-2x})'$
$= 2x \cdot e^{-2x} + (x^2+2) \cdot (-2) \cdot e^{-2x}$
$= 2x\ e^{-2x} + (-2x^2-4) \cdot e^{-2x}$
$= (-2x^2+2x-4) \cdot e^{-2x}$

e) $f'(x) = (-x^2+x+1)' \cdot e^{0{,}5x} + (-x^2+x+1) \cdot (e^{0{,}5x})'$
$= (-2x+1) \cdot e^{0{,}5x} + (-x^2+x+1) \cdot 0{,}5 \cdot e^{0{,}5x}$
$= (-2x+1) \cdot e^{0{,}5x} + (-0{,}5x^2+0{,}5x+0{,}5) e^{0{,}5x}$
$= (-0{,}5x^2-1{,}5x+1{,}5) \cdot e^{0{,}5x}$

f) $f'(x) = x' \cdot e^{3x-4} + x \cdot (e^{3x-4})'$
$= e^{3x-4} + x \cdot 3 \cdot e^{3x-4}$
$= (3x+1) \cdot e^{3x-4}$

g) $f'(x) = (e^{2x})' \cdot \sin x + e^{2x} \cdot (\sin x)'$
$= 2e^{2x} \cdot \sin x + e^{2x} \cdot (\ \cos x)$
$= (2\sin x + \cos x) \cdot e^{2x}$

h) $f'(x) = (\sqrt{x})' \cdot \sin(x^2) + \sqrt{x} \cdot (\sin(x^2))'$
$= (x^{\frac{1}{2}})' \cdot \sin(x^2) + \sqrt{x} \cdot 2x \cdot \cos(x^2)$
$= (\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}) \cdot \sin(x^2) + 2\sqrt{x}\, x \cdot \cos(x^2)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x^2) + 2\sqrt{x}\, x \cos(x^2)$

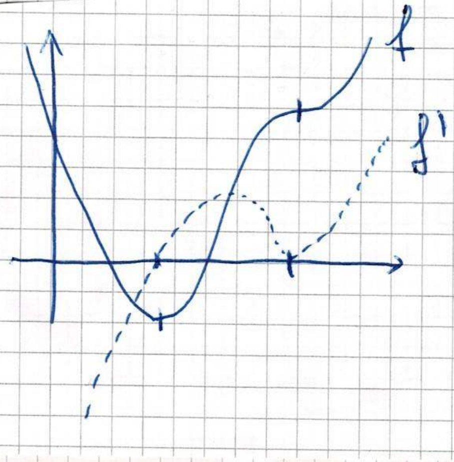
i) $f'(x) = 2 \cdot (e^{2x} - 1) \cdot (e^{2x} - 1)'$
$= 2 \cdot (e^{2x} - 1) \cdot 2e^{2x}$
$= 4e^{2x}(e^{2x} - 1)$
$= 4e^{4x} - 4e^{2x}$

3a) $F(x) = \frac{2}{3} e^{3x}$

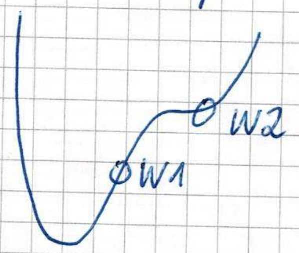
b) $F(x) = \frac{1}{5} e^{5x}$

c) $F(x) = \frac{1}{12} x^6 + \frac{1}{5} x^5 - 5x^2 + 2x$

4a)



b) Es gibt 2 Wendepunkte:



5a) $e^x \cdot (2x + x^2) = 0$

$e^x = 0$ oder $2x + x^2 = 0$

$↯$ $\qquad x(2 + x) = 0$

$x = 0$ oder $2 + x = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

b) $F'(x) = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)'$

$= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$= (x^2 + 2x) \cdot e^x$

$= f(x)$ ✓

$G(x) = x^2 \cdot e^x + c$

$G(1) = 1^2 \cdot e^1 + c = 2e$

$e + c = 2e \quad | -e$

$c = e$

$\Rightarrow G(x) = x^2 e^x + e$

6 a) $f_1(x) = -x^2 + 1$

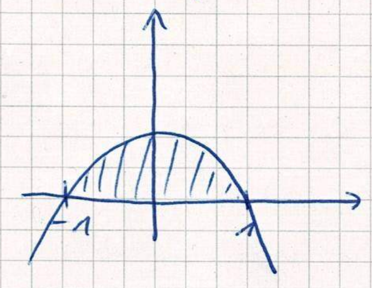
Nullstellen: $-x^2 + 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1 = -1$

$x_2 = 1$

Form des Graphen:



Die Fläche, die der Graph mit der x-Achse einschließt, liegt oberhalb der x-Achse und entspricht dem angegebenen Integral.
Da die Fläche oberhalb der x-Achse liegt, gilt: $\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx > 0$

b) $\int_{-1}^{1} -x^2 + a \, dx = 0$

$\left[-\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_{-1}^{1} = 0$

$-\frac{1}{3} + a - \left(\frac{1}{3} - a\right) = 0$

$-\frac{1}{3} + a - \frac{1}{3} + a = 0$

$$-\frac{2}{3}+2a=0$$

$$2a=\frac{2}{3}$$

$$\underline{a=\frac{1}{3}}$$

7 a) richtige Funktion: $g(x)$

$f(x)$ ist eine quadratische Funktion, die nur einen Extrempunkt haben kann. Die dargestellte Funktion hat aber zwei Extrempunkte.

Bei $h(x)$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\infty$$

Bei der dargestellten Funktion ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to-\infty}$ gleich $-\infty$.

b)

$$\int_0^1 h'(x)\,dx=\left[h(x)\right]_0^1=\left[x^4+x^2+1\right]_0^1$$

$$=1^4+1^2+1-(0^4+0^2+1)$$

$$=1+1+1-\quad 1$$

$$=2$$

8a) $ax^6 - x^4 = 0$

$x^4 \cdot (ax^2 - 1) = 0$

$x^4 = 0$ oder $ax^2 - 1 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad ax^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{a}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

Fallunterscheidung:

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
eine NS	eine NS	drei NS
$x = 0$	$x = 0$	$x_1 = 0$
		$x_2 = \sqrt{\frac{1}{a}}$
		$x_3 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$

b) $f_a'(x) = 6ax^5 - 4x^3$

$f_a'(1) = 0 \Rightarrow 6a - 4 = 0$

$6a = 4$

$a = \frac{2}{3}$

9a)

$x_1 = 0$

$x_2 = a$

b) $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$

$\int_0^a -ax(x-a)\,dx = \frac{8}{3}$

$$\int_0^a -ax^2 + a^2 x \, dx = \frac{8}{3}$$

$$\left[-\frac{a}{3}x^3 + \frac{a^2}{2}x^2\right]_0^a = \frac{8}{3}$$

$$-\frac{a}{3}\cdot a^3 + \frac{a^2}{2}a^2 - \left(-\frac{a}{3}\cdot 0 + a^2 0\right) = \frac{8}{3}$$

$$-\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{2} = \frac{8}{3}$$

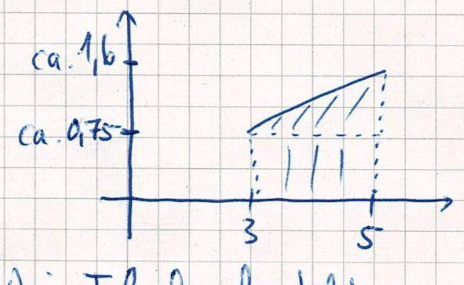
$$\frac{1}{6}a^4 = \frac{8}{3}$$

$$a^4 = 16 \quad |\sqrt[4]{\ }$$

$$a = \pm 2$$

$a = 2$ (nur die pos. Wurzel passt) da $a > 0$

10a) $\int_3^5 f(x)\,dx$ entspricht der Fläche, die der Graph von $x=3$ bis $x=5$ mit der x-Achse einschließt



Die Fläche besteht aus einem Rechteck (II) und einem Dreieck (///)

$A_{III} = 2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$

$A_{///} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0{,}85 = 0{,}85$

$\Rightarrow A = A_{III} + A_{///} = 2{,}35$ FE

b) Die Ableitung von F ist f
$\Rightarrow$ Wir lesen $f(2)$ ab

$\Rightarrow F'(2) = f(2) \approx 0{,}5$

11a) $2e^{0{,}5x} - 1 = 0$

$2e^{0{,}5x} = 1$

$e^{0{,}5x} = 0{,}5$

$0{,}5x = \ln(0{,}5)$

$x = 2 \cdot \ln(0{,}5)$

b) Bestimmung der Tangente:

$f'(x) = e^{0{,}5x}$

$f'(0) = e^0 = 1$

$\Rightarrow t(x) = x + b$

$S(0|1)$ auf $t \Rightarrow t(0) = 1$

$0 + b = 1$

$b = 1$

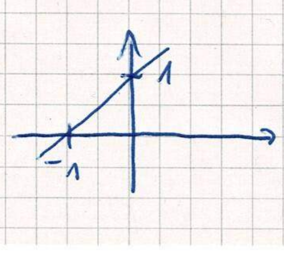
$\Rightarrow t(x) = x + 1$

Die Schnittpunkte von t mit den Achsen sind:

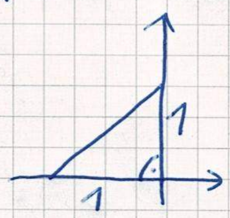
$t(0) = 1$

$t(x) = 0 \Rightarrow x + 1 = 0$

$x = -1$



Es ergibt sich ein gleichsch. Dreieck mit 2 Seiten, die 1LE lang sind:



12 a)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -6x^2+12x+18\,dx$$

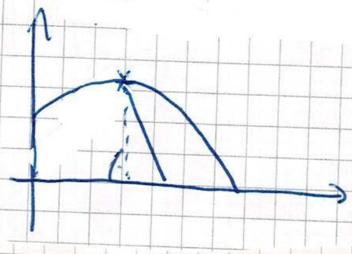
$$= \left[-2x^3+6x^2+18x\right]_0^1$$

$$= -2\cdot 1^3+6\cdot 1^2+18\cdot 1-\left(-2\cdot 0^3+6\cdot 0^2+18\cdot 0\right)$$

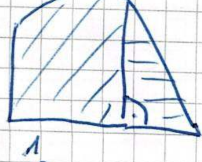
$$= -2+6+18-0$$

$$= 22$$

b)

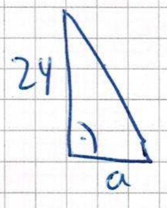


Das linke Flächenstück besteht aus 2 Teilen:



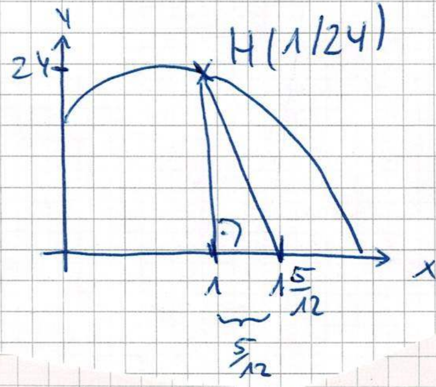
$$A_{III} = \int_0^1 f(x)\,dx = 22\ \text{FE} \quad (\text{siehe Teil a})$$

$\triangle$ ist ein rechtwinkliges Dreieck.
Seine Fläche muss 5 FE sein, da die beiden Teile zusammen $54:2=27$ FE groß sind



$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot a = 5$$
$$12a = 5$$
$$a = \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow S\left(1+\frac{5}{12} / 0\right)$$
$$S\left(\frac{17}{12} / 0\right)$$



13a) $f(-1) = a \cdot e^{a-1}$
$\Rightarrow P(-1 \mid a \cdot e^{a-1})$

$f_a'(x) = a \cdot e^{a+x}$
$f_a'(-1) = a \cdot e^{a-1}$

$\Rightarrow t(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + b$

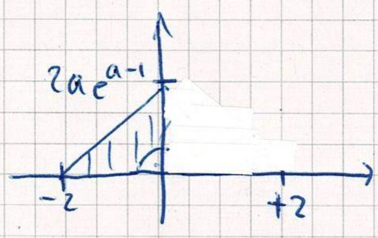
$P(-1 \mid a \cdot e^{a-1})$ auf t $\Rightarrow t(-1) = a \cdot e^{a-1}$

$$-ae^{a-1} + b = ae^{a-1}$$
$$b = 2ae^{a-1}$$
$$\Rightarrow t(x) = ae^{a-1} \cdot x + 2ae^{a-1}$$

b) Schnittpunkte mit den Achsen:

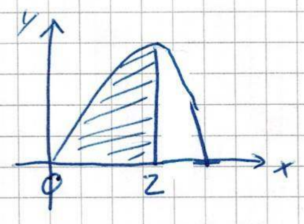
$$t(0) = a \cdot e^{a-1} \cdot 0 + 2 \cdot ae^{a-1} = 2ae^{a-1}$$

$$t(x) = 0 \Rightarrow ae^{a-1} x + 2ae^{a-1} = 0$$
$$ae^{a-1} x = -2ae^{a-1} \quad | : e^{a-1}$$
$$ax = -2a \quad | : a$$
$$x = -2$$



$$A = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot 2ae^{a-1} = \underline{2ae^{a-1} \text{ FE}}$$

14 a)



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 -x^3 + 12x\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_0^2$$

$= -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 6 \cdot 2^2 - \left(-\frac{1}{4} \cdot 0^4 + 6 \cdot 0^2\right)$

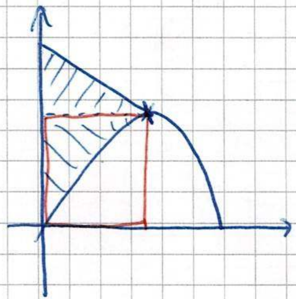
$= -\frac{1}{4} \cdot 16 + 6 \cdot 4 - 0$

$= -4 + 24$

$= 20$

$\Rightarrow A_{\equiv} = 20$ FE

b)



$A_{\text{III}} = A_{\square} - 20$ (20FE aus Aufgabenteil a)

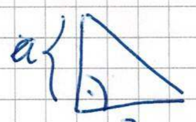
$= 2 \cdot 16 - 20$ $\quad f(2) = -8 + 24 = 16$

$= 32 - 20$

$= 12$ FE

$\Rightarrow A_{\text{III}}$ muss 8 FE umfassen

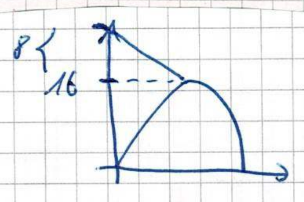
A_{III} ist die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks:



$A_{\text{III}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a = 8$

$a = 8$

$\Rightarrow$ Das obere Stück ist 8 lang



$8+16=24$

$\Rightarrow$ Schnittpunst $S(0/24)$

15a) Es gilt $f(0)=0^3-3\cdot 0-2=-2$

$\Rightarrow$ $A(0/-2)$ liegt auf f

$\Rightarrow$ Diese Bedingung trifft nur auf Abb. 2 zu

b) Abb. 4 zeigt einen Graphen, der dem von Abb. 2 gleicht und nur nach rechts verschoben wurde

$\rightarrow$ Abb. 4 gehört zu g

Abb. 3 zeigt einen Graphen, der an der x-Achse gespiegelt wurde und wo die y-Werte halbiert wurden

$\rightarrow$ Abb. 3 gehört zu h

$a = 2$

$b = -0{,}5$

c) $k_3(x) = f(x) + 3$

$= x^3 - 3x - 2 + 3$

$= x^3 - 3x + 1$

16) ① wahr

f ist streng monoton wachsend, wenn f' positiv ist. Dies ist der Fall.

② wahr

Wendepunkte von f sind Extrempunkte von f'. f' hat in $x=0$ einen EP

③ falsch

Der Graph von f ist von -3 bis 3 monoton wachsend und kann daher nicht achsensymm. zur y-Achse sein

④ unentscheidbar

Der Graph wächst zwar, aber man weiß nicht, von wo aus

17 a) Es gilt $f(0) = 0^2 \cdot e^0 = 0$

$\Rightarrow$ Das ist nur bei Abb. 1 und Abb. 4 der Fall.

Es gilt $f(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-1} = e^{-1} > 0$

$\Rightarrow$ Damit scheidet Abb. 4 aus

b) Abb. 3 gehört zu $g(x)$, da für $x=0$ gilt: $g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{0}$

Es ist also kein y-Wert vorhanden

$\Rightarrow$ Das ist nur bei Abb. 3 der Fall

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
$= (x^2 + 2x) \cdot e^x$

$f'(0) = 0 \cdot e^0 = 0$

$\Rightarrow$ Das ist bei Abb. 4 der Fall

$\Rightarrow$ F gehört zu Abb. 2