AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Die momentane Ankunftsrate an einem Kino, also die Zahl der ankommenden Personen pro Minute, wird beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = 0{,}27\,x^2 \cdot e^{-0{,}12\,x}.$$

Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19 Uhr und f(x) die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute. Vor 19 Uhr befinden sich noch keine Besucher am Kino.

a) Bestimme rechnerisch, wann die meisten Besucher pro Minute kommen und um wie viele Besucher pro Minute es sich dabei handelt.

b) Bestimmen Sie, ab wann weniger als 3 Personen pro Minute zum Kino kommen.

c) Die Funktion $g(x) = 312{,}5 - (2{,}25\,x^2 + 37{,}5\,x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}$ beschreibt die Anzahl der bis zum Zeitpunkt x insgesamt angekommenen Personen (also die Anzahl der Personen, die insgesamt vor dem Kino warten)

(I) Zeige, dass g eine Stammfunktion von f ist

(II) Gib an, wie viele Personen insgesamt höchstens zum Kino kommen.

d) Um 19:20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können an 6 Personen Karten ausgegeben werden.

① Bestimme, welche Wartezeit eine Person hat, die um 19:20 Uhr zum Kino kommt.

② Bestimme rechnerisch, wann die Zahl der Wartenden am größten ist und wie viele Personen dann warten.

③ Bestimme rechnerisch, wann sich die Warteschlange aufgelöst hat.

e) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19:50 Uhr. Berechne wie viele Personen jetzt pro Minute am Schalter bedient werden müssen, damit die Warteschlange um 20:30 Uhr abgebaut ist.

(Vorbild: Baden-Württemberg 2007)

2) Gegeben sei die Funktionenschar $f_a(x) = x^3 - a^2 \cdot x$

a) Berechne die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a

b) Berechne die Koordinaten der Extrempunkte von f_a in Abhängigkeit von a.

c) Berechne die Funktionsgleichung der Ortslinie der Extrempunkte.

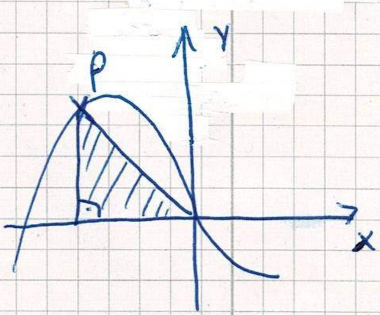
d) Bestimme rechnerisch, ob es Punkte gibt, die auf allen Funktionen der Schar liegen.

e) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Tangente an f_a durch $A(a / f(a))$

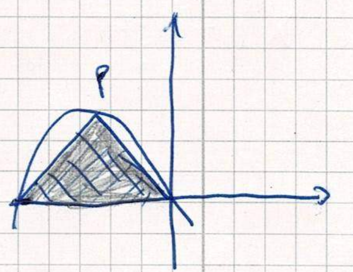
Wir betrachten ab jetzt die Funktion
$f(x) = x^3 - 4x$

f) Bestimme die Größe des Flächeninhalts, den f mit der x-Achse einschließt

g) Im 2. Quadranten wird mit Hilfe eines Punktes auf dem Graphen ein rechtwinkliges Dreieck konstruiert (schraffierte Fläche). Berechne, wie man P wählen muss, damit die Fläche des Dreiecks maximal wird.



h) Die Situation von Aufgabe g wird leicht verändert: Es ist kein rechtwinkliges Dreieck mehr und die Grundseite reicht links bis zur Nullstelle. Berechne, wie man P wählen muss, damit die Fläche des Dreiecks maximal wird.



i) Gegeben sei zusätzlich die Funktionenschar $g_b(x) = b \cdot x$. Bestimme rechnerisch die Schnittpunkte von f_a und g_b

3) Abitur Bremen 2009

Hochwasser

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die Fließgeschwindigkeiten der Weser in $\frac{m^3}{s}$ [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.

Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

a) Die Weser hatte zu Beginn der Messung eine Fließgeschwindigkeit von $6600\frac{m^3}{s}$. Eine Stunde nach Beginn der Messung stieg die Fließgeschwindigkeit auf ihren höchsten Wert von $9000\frac{m^3}{s}$ an.
Drei Stunden nach Beginn der Messung hatte die Weser wieder die Fließgeschwindigkeit erreicht, die sie zu Beginn der Messung hatte.
Das Wasser- und Schifffahrtsamt möchte die Fließgeschwindigkeit der Weser auf der Höhe von Bremerhaven mit Hilfe der beschriebenen Messergebnisse näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x, wobei x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $f(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x angibt.

Messungen an anderen Tagen bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden zeigten, dass sich die Fließgeschwindigkeiten der Weser durch die Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600,\ 0 \le x \le 3$$

und $k \in [3550; 3600]$ beschreiben lassen.

Die Aufgabenteile b) bis e) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser sowohl zwei als auch drei Stunden nach Beginn der Messung.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert der Fließgeschwindigkeit, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

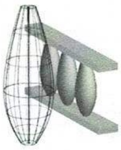
c) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von f_k bei $x_W = \frac{k}{1800}$ liegt und dass die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit $-\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600\ \frac{m^3}{s}$ beträgt. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

d) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte (vgl. Teil c)) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen einer Funktion h liegen und geben Sie die zugehörige Funktionsvorschrift an.

e) Geben Sie die Funktion g_k an, welche die Fließgeschwindigkeit in „m^3 pro Stunde" statt in „m^3 pro Sekunde" beschreiben.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Integralrechnung diejenige Wassermenge, welche in der Zeit von Beginn der Messung bis eine Stunde nach Beginn der Messung durch die Weser fließt.
Geben Sie jeweils die größte und kleinste Wassermenge an, die aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

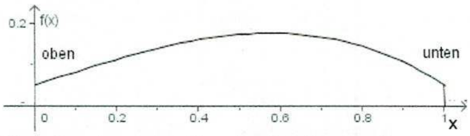
4) Abitur Bremen 2008

Balkongeländer



Ein Zimmermannsbetrieb stellt Balkon- und Treppengeländer im Landhausstil her. Die senkrechten Pfosten des Geländers werden in einer Drechselmaschine hergestellt, indem ein Holzklotz unter einem Messer rotiert. Das Messer bewegt sich dabei entsprechend einer eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt für jeden Querschnitt des Pfostens seinen Radius in Metern an. Der entstehende horizontale Holzpfosten wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende oben und das rechte unten befindet.

a) Ein $1m$ langer Pfosten soll an beiden Enden einen Radius von jeweils $0{,}05m$ besitzen. Auf der Höhe von 50 cm soll sein Radius $0{,}175\,m$ betragen. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Bauches zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am rechten Ende durch $f''(1) = -2$ festgelegt. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.



Die Maschine ist in der Lage, Pfosten mit den Randfunktionen f_k mit der Gleichung

$$f_k(x) = -\tfrac{1}{3}x^3 + kx + \tfrac{1}{20}$$

herzustellen. Dabei kann k aus dem Intervall $[0{,}33\,;0{,}50]$ gewählt werden. Die Aufgabenteile b) bis d) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

b) Berechnen Sie den Radius des Pfostens sowohl an seinem Fußpunkt als auch an seinem oberen Ende. Geben Sie jeweils den größten und kleinsten Wert an, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

c) Zeigen Sie, dass die Höhe, in der der Pfosten seinen größten Durchmesser erreicht, bei $x_{\max} = \sqrt{k}$ liegt und der Radius an dieser Stelle $f_k(x_{\max}) = \frac{2}{3}k\sqrt{k} + \frac{1}{20}$ beträgt.

d) Zeigen Sie, dass alle Hochpunkte (vgl. Teil c) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen einer Funktion h liegen. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion an.

e) Bestimmen Sie das Volumen des Holzpfostens für $k = \frac{1}{3}$, damit der Hersteller abschätzen kann, wie viel Abfall produziert wird.
Ermitteln Sie den Abfall, wenn das Rohmaterial ein Balken der Maße $1m \times 0{,}36m \times 0{,}36m$ ist.
Vergleichen Sie die beiden Volumina miteinander.

5) Abitur Bremen 2011

Skatebahn

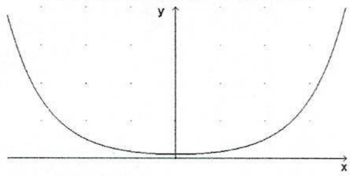
Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma.

Skate-Parks stellen Bahnen zur Verfügung, die mit Skateboards, Inlinern oder BMX-Rädern befahren werden können.

Der Betreiber eines Skate-Parks schreibt einen Wettbewerb aus. Jugendliche sollen einen Vorschlag für die Konstruktion einer Bahn einreichen.

Eine Gruppe von Jugendlichen nimmt an dem Wettbewerb teil. Sie stellen Skatebahnen im Profil als Graphen von Funktionen dar (Siehe Grafik und Profil).

In dieser Aufgabe werden die Modellierungen einer Skatebahn durch unterschiedliche Funktionen untersucht. Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass der Tiefpunkt der Bahn auf der y – Achse und die x – Achse auf der Höhe des Erdbodens liegt.



Eine Bahn im Profil

a) Der Betreiber des Skate-Parks gibt bestimmte Eckdaten für eine Bahn vor. An der tiefsten Stelle soll die Bahn $0{,}1$ m über dem Erdboden liegen. In einem Abstand von 4 m zur tiefsten Stelle muss die Bahn eine Höhe von 5 m aufweisen.

Eine erste Modellierung, die sich nur auf den Bereich $0 \le x \le 4$ beschränkt, wird mit der Funktion f vom Typ $f(x) = a\,e^{kx}$ vorgenommen.

Ermitteln Sie aus den oben genannten Anforderungen an den *rechten* Teil der Bahn die Parameter a und k und die Funktionsgleichung.
(Kontrollergebnis: $f(x) = 0{,}1e^{0{,}98x}$ für $0 \le x \le 4$)

b) Skizzieren Sie den *linken* Teil der Bahn mit Hilfe der Funktion g mit $g(x) = 0{,}1\,e^{-0{,}98x}$ für $-4 \le x \le 0$ in das Koordinatensystem im Anhang.

Geben Sie die Gleichungen der Ableitungen f' und g' an.

Begründen Sie unter Verwendung der Steigungen $f'(0)$ bzw. $g'(0)$, weshalb es nicht sinnvoll ist, die Bahn mit Hilfe der Funktionen f und g zu konstruieren.

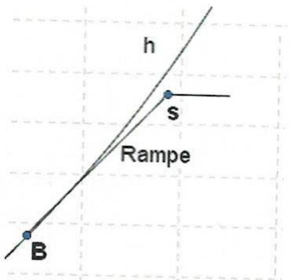
Eine weitere Modellierung verwendet eine Funktion h mit der Gleichung $h(x) = 0{,}05\,(e^{1{,}15x} + e^{-1{,}15x})$ für $-4 \le x \le 4$.

c) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Überprüfung der Funktionswerte, ob die Bahn unter Verwendung der Funktion h im gesamten Intervall die geforderten Kriterien näherungsweise erfüllt.

Ermitteln Sie die Gleichung der Ableitung h'. (Zur Kontrolle: $h'(x) \approx 0{,}06\,(e^{1{,}15x} - e^{-1{,}15x})$)

Ermitteln Sie rechnerisch den Tiefpunkt der Bahn.

d) Die Bahn mit der Funktion h für $x > 0$ hat im *rechten* Teil eine Rampe. Sie ermöglicht einen leichten Einstieg in die Bahn. Die Rampe, welche als Stück einer Geraden beschrieben werden kann, wird im Punkt B in die Bahn geführt. Sie hat eine Steigung von $m = 2$ und ist 1 m lang. Sie beginnt im Punkt S.



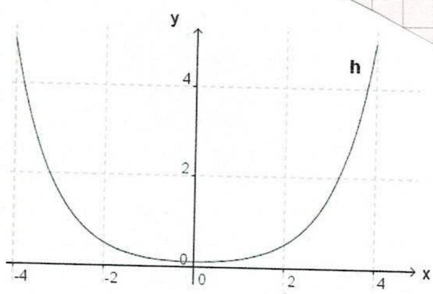
Zeigen Sie, dass die Funktion h im Punkt $B(3,05 \mid 1,67)$ die Bedingung $m \approx 2$ erfüllt.

Ermitteln Sie die Geradengleichung der Rampe.

Berechnen Sie die Koordinaten des Startpunkts S der Rampe.

(Hinweis: Nutzen Sie ggfs. h' aus Aufgabenteil c.)

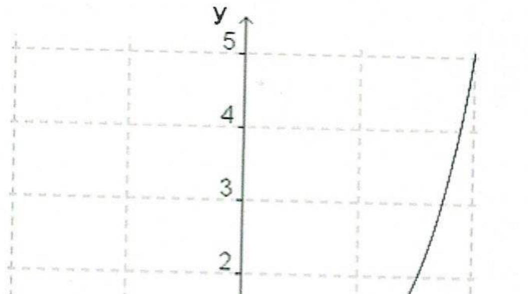
e) Die Bahn mit der Funktion h für $-4 \leq x \leq 4$ soll von der Seite mit Holz verkleidet werden.



Ermitteln Sie eine Stammfunktion zu h.

Berechnen Sie die Fläche der Holzverkleidung zwischen dem Graphen und der x-Achse über dem angegebenen Intervall.

Anhang:



6) Abitur Baden-Württemberg 2016

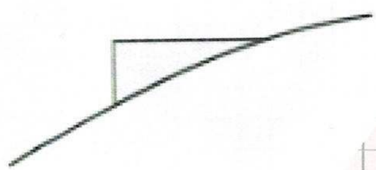
Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}5x^2 + 3{,}6$ beschreibt modellhaft für $-1 \leq x \leq 5$ das Profil eines Geländequerschnitts.
Die positive x-Achse weist nach Osten, f(x) gibt die Höhe über dem Meeresspiegel an.
(1 Längeneinheit entspricht 100 m)

a) Bestimme rechnerisch den höchsten Punkt des Profils.

In dem Tal westlich dieses Punktes befindet sich ein See, der im Geländequerschnitt an seiner tiefsten Stelle 10 m tief ist.
Bestimmen Sie die Breite des Sees im Geländequerschnitt.
Ab einer Hangneigung von 30° besteht die Gefahr, dass sich Lawinen lösen.

Bestimme rechnerisch, ob an der steilsten Stelle des Profils zwischen See und höchstem Punkt Lawinengefahr besteht.

b)
Am Hang zwischen dem höchsten Punkt und dem westlich davon gelegenen Tal befindet sich ein in den Hang gebautes Gebäude, dessen rechteckige Seitenwand im Geländequerschnitt liegt.
Die Abbildung zeigt den sichtbaren Teil dieser Seitenwand. Die Oberkante der Wand verläuft waagrecht auf 540 m Höhe. Von dieser Kante sind 28 m sichtbar.



Berechnen Sie, ob der Flächeninhalt des sichtbaren Wandteils größer als 130m² ist.

c) Der weitere Verlauf des Profils nach Osten hin kann durch eine Parabel zweiter Ordnung modelliert werden, die sich ohne Knick an den Graphen von f anschließt. Ihr Scheitel liegt bei x = 6 und beschreibt den tiefsten Punkt eines benachbarten Tals.

Berechne auf welcher Höhe sich dieser Punkt befindet.

7) Abitur Baden-Württemberg 2016

In einem Skigebiet beträgt die Schneehöhe um 10.00 Uhr an einer Messstelle 150 cm. Die momentane Änderungsrate dieser Schneehöhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 16e^{-0{,}5t} - 14e^{-t} - 2 \quad ; \quad 0 \le t \le 12$$

(t in Stunden nach 10.00 Uhr, s(t) in Zentimeter pro Stunde).

a) Berechnen Sie die maximale momentane Änderungsrate der Schneehöhe.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate der Schneehöhe größer als 2 cm pro Stunde ist.

Bestimmen Sie, wie hoch der Schnee um 12 Uhr liegt.

b) Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm, der die Schneehöhe zum Zeitpunkt t beschreibt.

Bestimmen Sie, zu welchen Uhrzeiten die Schneehöhe 153 cm beträgt.

c) Um 12.30 Uhr werden nun Schneekanonen in Betrieb genommen. Sie liefern konstant so viel Schnee, dass sich die momentane Änderungsrate der Schneehöhe an der Messstelle um 1 cm pro Stunde erhöht.

Berechnen Sie, um wie viele Stunden sich durch diese Maßnahme der Zeitraum verlängert, in dem die Schneehöhe zunimmt.

Bestimmen Sie, wie viele Zentimeter Schnee pro Stunde die Schneekanonen ab 12:30 Uhr liefern müssten, damit um 18 Uhr die Schneehöhe 160 cm beträgt.

8) Abitur Mecklenburg-Vorpommern 2000

Aufgabe B5: Analysis

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch
$y = f_a(x) = xe^{-ax}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. G_a sei der zu f_a gehörige Graph.

5.1 Berechnen Sie die Koordiaten der Extrem- und Wendepunkte von G_a. Skizzieren Sie die Graphen $G_{0,5}$ und $G_{0,25}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

5.2 Zeigen Sie, dass der Anstieg von f_a an der Stelle 0 von a unabhängig ist.

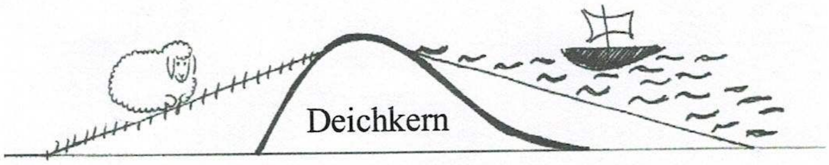
5.3 Beweisen Sie, dass F_a mit $F_a(x) = \frac{-1}{a} e^{-ax}\left(x + \frac{1}{a}\right)$ eine Stammfunktion von f_a ist.
Der Graph G_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = z$, $z > 0$, schließen eine Fläche mit dem Inhalt $A(z)$ ein. Berechnen Sie $\lim\limits_{z \to \infty} A(z)$.

5.4 Die Punkte $O(0|0)$, $P(u|0)$, $Q(u|f_a(u))$ und $R(0|f_a(u))$, $u > 0$, sind Eckpunkte eines Rechtecks. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q so, dass der Flächeninhalt dieses Rechtecks maximal wird.

9) Abitur Hamburg 2006

Deichbau

Entlang der Küsten sind so genannte Sommerdeiche den Hauptdeichen vorgelagert. Sie sind mit Böschungsneigungen (Neigung = Betrag der Steigung) von 1 : 7 (bis zu 1 : 12) zur See hin und mit Böschungsneigungen von 1 : 5 (bis zu 1 : 10) zum Land hin den besonderen Beanspruchungen durch das Überströmen bei Sturmfluten angepasst.



Die Deiche bestehen aus einem so genannten Deichkern und zum Land und zum Wasser hin auslaufenden Wällen. Der Kern eines solchen Deiches kann durch die Funktion $f_{a;b}$ mit

$$f_{a;b}(x) = (x + a) \cdot e^{b-x} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden.

a) Berechnen Sie die Nullstelle, den Extrempunkt und den Wendepunkt des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von den Parametern a und b. [Kontrollergebnis: $f'(x) = (1 - x - a)e^{b-x}$].

Ein Sommerdeich in der Nähe von Nordstrand soll eine Deichhöhe von 3,50 m haben. Für die Modellierung soll folgendes gelten:

- Die Deichkrone (das ist die höchste Stelle des Deichkerns) liegt auf der y-Achse.
- Die Meerseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x > 0$.
- Die Landseite des Deiches entspricht dem Funktionsgraphen für $x < 0$.

b) Bestimmen Sie a und b so, dass $f_{a;b}$ den oben genannten Bedingungen entspricht. Geben Sie die Koordinaten von Wendepunkt und Hochpunkt an und skizzieren Sie den Graphen der Funktion. [Kontrollergebnis: $a = 1$, $b = \ln 3{,}5$.]

c) Zur Landseite wird der Deichkern mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet. Die Höhe der Aufschüttung kann mit einer linearen Funktion g beschrieben werden, die die y-Achse in der Deichkrone trifft und die Höhe NN (Normal Null, also Schnittpunkt mit der x-Achse) bei $x = -17{,}5$ erreicht.
Berechnen Sie den Funktionsterm von g und zeigen Sie, dass sich das Gefälle der Aufschüttung in der vorgegebenen Toleranz von 1:5 bis 1:10 befindet.

d) Zur Seeseite hin soll der Deich vom Wendepunkt ab mit einem Gefälle von 1:7 ebenfalls mit einem Sand-Kiesel-Gemisch aufgeschüttet werden.
Berechnen Sie den Term der linearen Funktion h, die diese Aufschüttung beschreibt.

e) Ermitteln Sie, wie viel m^3 Sand-Kiesel-Gemisch für 10 Meter der seeseitigen Aufschüttung benötigt werden.