AUFGABEN (TEIL 1: hilfsmittelfreier Teil)

1) Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 8 \\ \text{II.}\quad & 2x + 3y - z = 3 \\ \text{III.}\quad & 3x - 2y + 2z = 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x - 2y + 3z = -3 \\ \text{II.}\quad & 2x + y - 4z = 9 \\ \text{III.}\quad & x + y - 2z = 5 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + 2y = 5 \\ \text{II.}\quad & -3x + y = -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z + t = 4 \\ \text{II.}\quad & 2x - y + 3z + 4t = 6 \\ \text{III.}\quad & -x + 2y - 4z + t = 14 \\ \text{IV.}\quad & 3x + 2y + z - t = 2 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 1 \\ \text{II.}\quad & 2x + 2y - z = 0 \\ \text{III.}\quad & 3x - y + 2z = 1 \end{aligned}$$

f) I. $x + y + z = 2$
II. $2x + y - z = 1$
III. $-x + y + 5z = 0$

g) I. $x + y + z = 3$
II. $3x - y + 2z = 4$
III. $6x - 2y + 4z = 8$

2) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

I. $x + y + z = 10$
II. $a \cdot x - y + 3z = 17$
III. $b \cdot x + a \cdot y + b \cdot z = 27$

Es hat als Lösung $x = 1$ und $y = 3$.
Bestimme z, a und b.

3) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

I. $x + y + z = 1$
II. $x + 2y + 3z = 2$
III. $x + 3y + a \cdot z = 5$

Für welche Werte von a hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung bzw. unendlich viele Lösungen?

4) Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$

b) Bestimme die inversen Matrizen A^{-1} und B^{-1}

c) Bestimme die Potenzen A^2 und B^2

5) Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}$

Welchen Wert muss man für t wählen, damit gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

6) In einer Stadt gibt es drei Supermärkte: A, B und C. Von den Kunden von A sind 80 % in der nächsten Woche auch bei A, 15 % bei C und der Rest bei B. Von den Kunden von B bleiben 70 % bei B, während 20 % zu C wechseln und 10 % zu A. Von den Kunden von C bleiben 75 % bei C, 15 % wechseln zu A und der Rest zu B.

a) Zeichne ein Übergangsdiagramm.

b) Stelle eine Übergangsmatrix auf.

7) Bestimme die inverse Matrix von

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben ist ein lineares Gleichungssystem durch:

$$\begin{array}{lrrrrrrl} \text{I:} & 2x_1 & +3 & x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ \text{II:} & -2x_1 & +2 & x_2 & & & = & -8 \\ \text{III:} & & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

a) **Zeigen** Sie, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

b) Es gibt eine Zahl, durch die man die Zahl 2 auf der rechten Seite der dritten Gleichung ersetzen kann, sodass das geänderte Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat. **Geben** Sie diese Zahl **an** und **begründen** Sie Ihre Antwort.

9) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

In einem System verteilt sich ein Gesamtbestand auf die Zustände A und B. Die Verteilung wird durch Zustandsvektoren $\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \end{pmatrix}$ beschrieben. Pro Zeiteinheit finden zwischen den Zuständen die in der Abbildung 27 dargestellten Übergänge statt.

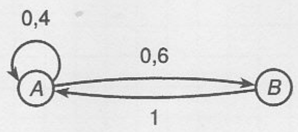


Abb. 27

Geben Sie die zugehörige Übergangsmatrix M **an**.
Bestimmen Sie die Matrix N, die die Übergänge in zwei aufeinanderfolgenden Zeiteinheiten zusammenfassend beschreibt.

10) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben sind die Matrix A mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{u}$ mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie das Produkt $A \cdot \vec{u}$.

Geben Sie zwei von $\vec{u}$ verschiedene Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ **an**, sodass gilt:

$$A \cdot \vec{u} = A \cdot \vec{v} = A \cdot \vec{w}$$

b) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(k \in \mathbb{R})$ gilt: $A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

11) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Eine Anzahl von Objekten verteilt sich auf zwei Zustände A und B.

In den Verteilungsvektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gibt a den Anteil der Objekte im Zustand A an und b den Anteil der Objekte im Zustand B.

a) In einem ersten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

Bestimmen Sie die Matrix, die zwei Übergänge zusammenfasst.

b) In einem zweiten System wird der Übergang von einer Verteilung zu der folgenden durch eine Übergangsmatrix N beschrieben. Die Anfangsverteilung ist $\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Die Abbildung 28 stellt die Entwicklung des Anteils im Zustand A für die ersten zehn Übergänge dar.

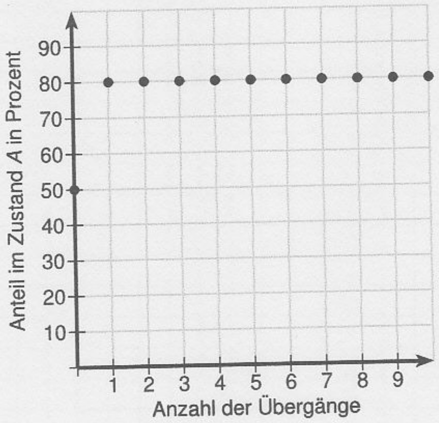


Abb. 28

Begründen Sie, dass $N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ die zugehörige Übergangsmatrix sein kann.

12) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Untersucht werden die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen.

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 &= 13 \\ x_2 + 2\cdot x_3 &= 5 \\ x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

b) Betrachtet wird das folgende Gleichungssystem mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 &= 4 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 &= 5 \\ 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + p\cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Geben Sie einen Wert von p **an**, für den das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.

Zeigen Sie, dass es keinen Wert von p gibt, für den das Gleichungssystem genau eine Lösung hat.

13) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

In einem Labor wird das Wechseln von Ratten zwischen vier miteinander verbundenen Räumen R_1, R_2, R_3 und R_4 beobachtet. Das Wechseln der Ratten von einem Beobachtungszeitpunkt zum nächsten lässt sich durch das abgebildete Übergangsdiagramm beschreiben.

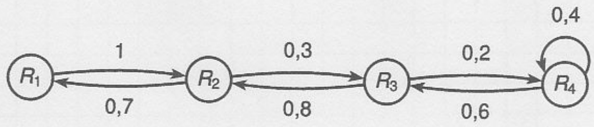
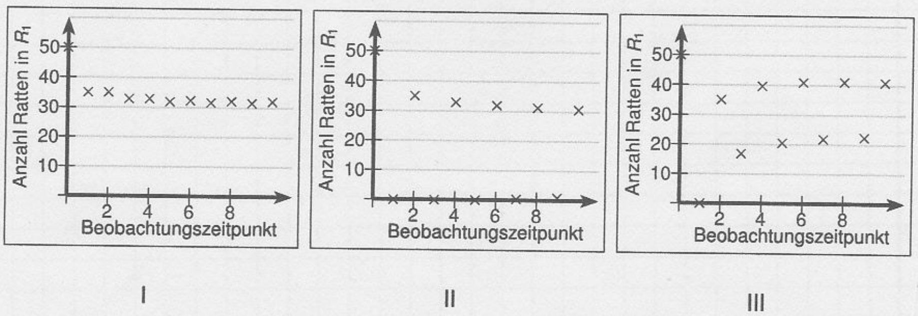


Abb. 29

a) Geben Sie eine zugehörige Übergangsmatrix **an**.

b) Zu Beginn einer Beobachtung sind 50 Ratten in R_1, die übrigen drei Räume sind leer. Eine der folgenden Abbildungen beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Ratten in R_1.



Geben Sie **an**, um welche Abbildung es sich handelt.
Begründen Sie Ihre Angabe.

14) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Eine Matrix, die die folgenden beiden Bedingungen erfüllt, heißt stochastisch.

1. Alle Spaltensummen haben den Wert 1.
2. Kein Matrixelement ist negativ.

a) **Ergänzen** Sie die Leerstellen der Matrix $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \square \\ 0 & \square & \square \\ \square & \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ durch Zahlen, sodass die Matrix M stochastisch ist.

b) Es sei $N = \begin{pmatrix} 0{,}5 & t \\ 0{,}5 & 1-t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0;1]$ eine stochastische Matrix, $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = N \cdot \vec{v}$.
Entscheiden Sie rechnerisch begründet, ob die beiden Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ dieselbe Spaltensumme haben.

15) (Vorbild: Aufgabensammlung Hamburg)

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) **Entscheiden** Sie für jeden der Terme $B \cdot A$ und $A \cdot B$, ob er definiert ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

b) **Bestimmen** Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a, b, c und d so, dass $B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt.