AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 1{,}5$

c) $f(x) = x^3 - 9x$

d) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

e) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$

f) $f(x) = \sqrt{x+1}$

g) $f(x) = \frac{x+2}{x}$

h) $f(x) = x^5 + 2x^3 - 3x$

i) $f(x) = (2x^2 - 50) \cdot (x+3)$

j) $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

k) $f(x) = (x+7) \cdot e^{2x}$

l) $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{4x}$

m) $f(x) = e^{2x} - 2e^x - 8$

n) $f(x) = (x^3 - 2x) \cdot (e^{2x} - 5)$

o) $f(x) = 2e^x - 6$

2) Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3e^{2x}$

b) $f(x) = (x+2) \cdot e^{2x}$

c) $f(x) = (3x+4) \cdot e^{-3x}$

d) $f(x) = (x^2+2) \cdot e^{-2x}$

e) $f(x) = (-x^2+x+1) \cdot e^{0{,}5x}$

f) $f(x) = x \cdot e^{3x-4}$

g) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin(x)$

h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$

i) $f(x) = (e^{2x}-1)^2$

3) Berechne jeweils eine Stammfunktion:

a) $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

b) $f(x) = e^{5x}$

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 + x^4 - 10x + 2$

4) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 22).

Die Abbildung 13 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

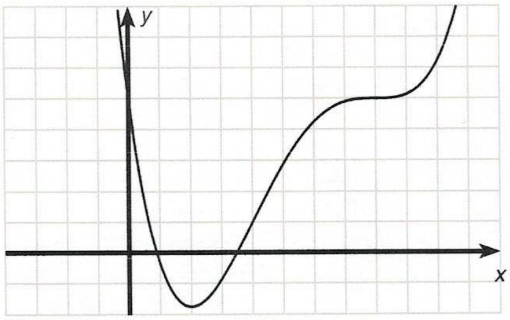


Abb. 13

a) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.

b) Begründen Sie, dass der Grad der Funktion mindestens vier ist.

5) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 23)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2 \cdot x + x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f **an**, für die $G(1) = 2e$ gilt.

6) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 24)

Für jeden Wert von a $(a \in \mathbb{R})$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -x^2 + a$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Begründen Sie mithilfe der Lage des Graphen von f_1 im Koordinatensystem, dass $\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx > 0$ gilt.

b) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_{-1}^{1} f_a(x)\,dx = 0$ gilt.

7) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 25)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f, g und h durch

$$f(x) = x^2 - x + 1,$$
$$g(x) = x^3 - x + 1 \quad \text{und}$$
$$h(x) = x^4 + x^2 + 1.$$

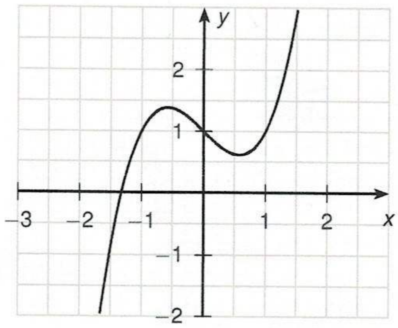


Abb. 14

a) Die Abbildung 14 zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.
Geben Sie **an**, um welche Funktion es sich handelt.
Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.

b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h'.
Berechnen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x)\,dx$.

8) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 26)

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) ist eine Funktion f_a durch

$$f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

gegeben.

a) **Be**rechnen Sie diejenigen Werte von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle $x = 1$ ein Minimum.
Berechnen Sie diesen Wert von a.

9) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 27)

Gegeben sind die Funktionen f_a mit $f_a(x) = -a \cdot x \cdot (x-a)$, wobei $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

a) Geben Sie die Nullstellen der Funktionen f_a **an**.

b) Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den $\int_0^a f_a(x)\,dx = \frac{8}{3}$ gilt.

10) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 28)

Die Abbildung 15 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f.

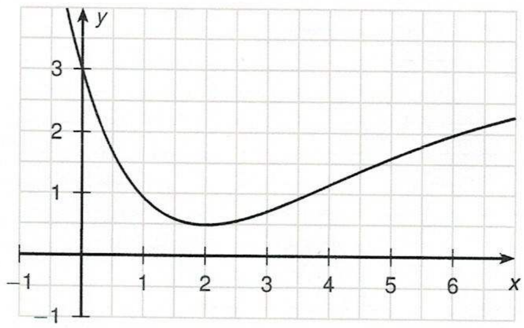


Abb. 15

a) Berechnen Sie mithilfe der Abbildung 15 einen Näherungswert für $\int_3^5 f(x)\,dx$.

Die Funktion F ist die in $\mathbb{R}$ definierte Stammfunktion von f mit $F(3) = 0$.

b) Geben Sie mithilfe der Abbildung 15 einen Näherungswert für die Ableitung von F an der Stelle $x = 2$ **an**.

11) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 29)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie **nach**, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

12) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 32)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -6x^2 + 12x + 18, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Abbildung 16 zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.

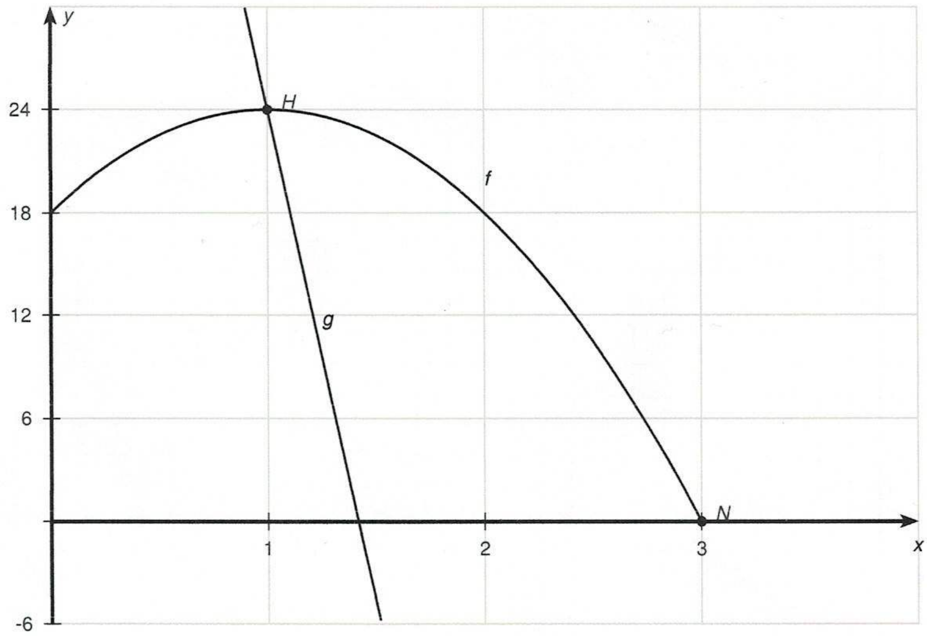


Abb. 16

a) **Zeigen** Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,dx = 22$ gilt.

b) Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g, die durch den Punkt H verläuft, teilt diese Fläche in zwei Teilflächen gleichen Inhalts.
Bestimmen Sie rechnerisch die Stelle, an der die Gerade g die x-Achse schneidet.

13) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 35)

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1|f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann.

b) Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a.

14) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 36)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung 18 zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.

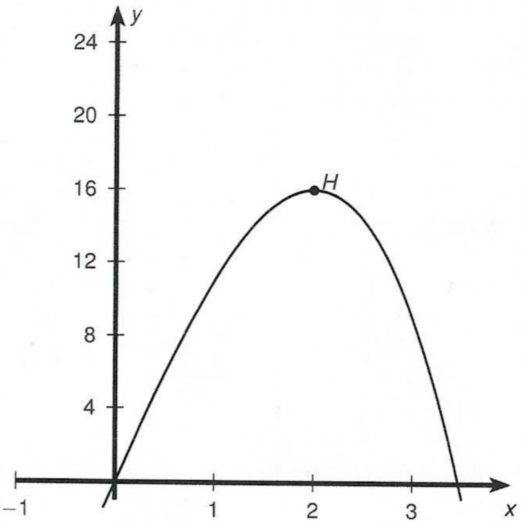


Abb. 18

a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse.

15) Abitur Baden-Württemberg 2012

Eine der folgenden Abbildungen zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

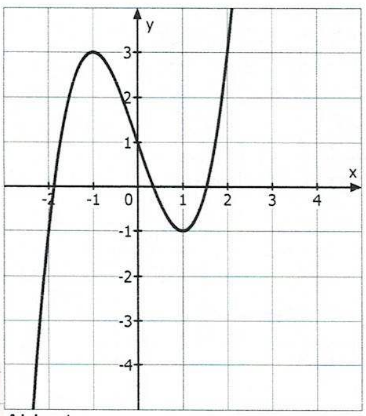


Abb. 1

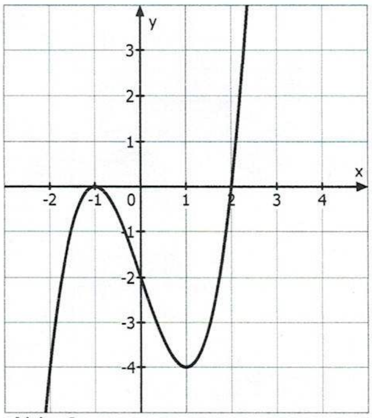


Abb. 2

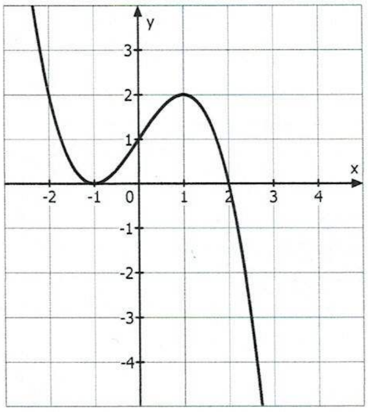


Abb. 3

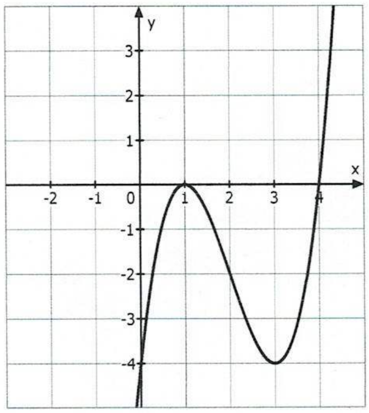
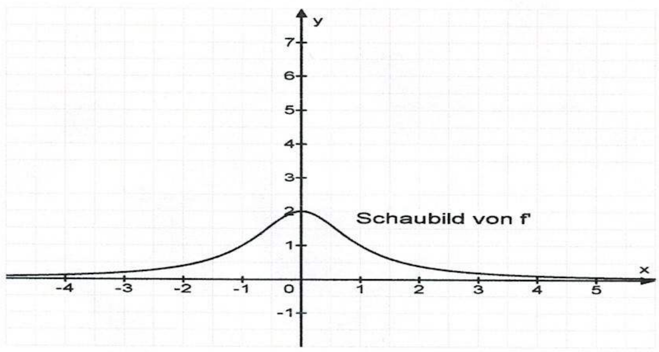


Abb. 4

a) Begründen Sie, dass die Abbildung 2 den Graphen von f zeigt.
b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Funktion g mit $g(x) = f(x - a)$ und eine zur Funktion h mit $h(x) = b \cdot f(x)$
Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Geben Sie die Werte für a und b an.
c) Die bis jetzt nicht zugeordnete Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion k.
Geben Sie ohne Rechnung einen Funktionsterm für k an.

16) Abitur Baden-Württemberg 2004

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar ? Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.

17) (Abitur Baden-Württemberg 2005)

Gegeben sind die Schaubilder der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f', einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

a) Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schaubild der Funktion f sein kann.
b) Ordnen Sie die Funktionen f', F und g den übrigen Schaubildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bild 1

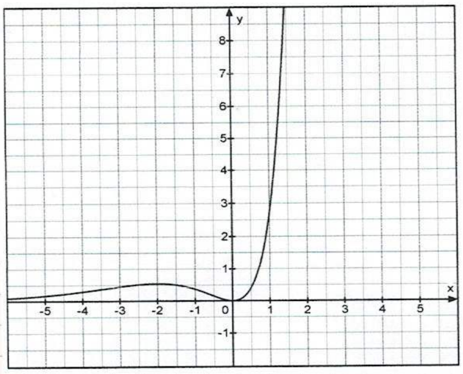


Bild 2

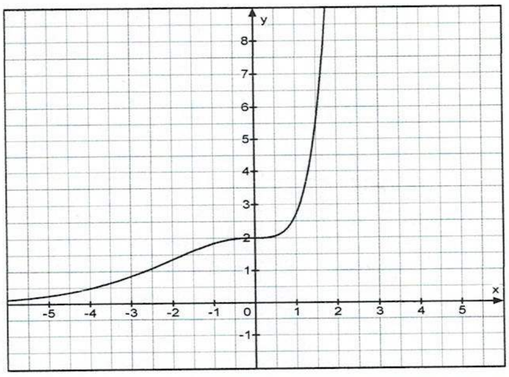


Bild 3

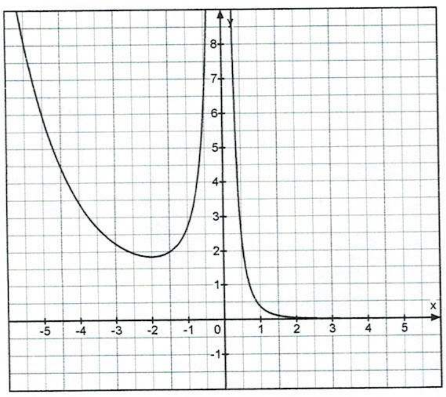


Bild 4