LÖSUNGEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

b) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $\binom{6}{0} = 1$

Erinnerung: $\binom{n}{0} = 1$ für alle n

d) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 20$

e) $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} = \frac{\cancel{3!}}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{1! \cancel{3!}} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}} = 12$

f) $\binom{k}{0} = 1$

g) $\binom{t}{1} = \frac{t!}{1! \cdot (t-1)!} = \frac{t \cdot \cancel{(t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot 1}}{1 \cdot \cancel{(t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot 1}} = t$

h) $\binom{t}{2} = \frac{t!}{2! \cdot (t-2)!} = \frac{t \cdot (t-1) \cdot \cancel{(t-2) \cdot (t-3) \cdot \ldots \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(t-2) \cdot (t-3) \cdot \ldots \cdot 1}}$

$= \frac{t \cdot (t-1)}{2} = \frac{1}{2}(t^2 - t)$

2) Es gilt:

$(a+b)^6 = \binom{6}{0} \cdot a^6 + \binom{6}{1} \cdot a^5 b + \binom{6}{2} \cdot a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \ldots$

$\Rightarrow$ Der Vorfaktor ist $\binom{6}{3} = 20$

3) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$

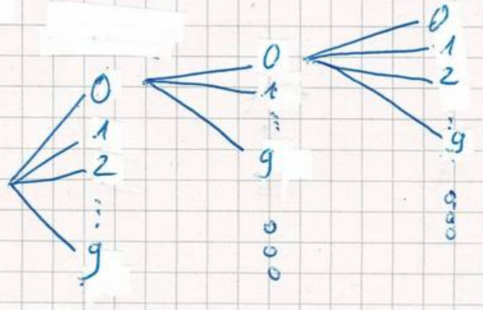
q.e.d.

4) Es gilt: Die Einträge sind jeweils die Summe der beiden Einträge rechts und links darüber.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

5) a) Es gibt insgesamt 10 Möglichkeiten pro Ring.

Anzahl $= 10^3 = 1000$



Ring 1 Ring 2 Ring 3

Mit jedem Ring verzehnfacht sich die Zahl der Möglichkeiten.

b) Es gibt 5 ungrade Ziffern: 1, 3, 5, 7, 9.
Für den mittleren Ring gibt es nur noch 5 Möglichkeiten, für die beiden anderen weiter 10.

$$\begin{aligned} \text{Anzahl} &= 10 \cdot 5 \cdot 10 \\ &= 10^2 \cdot 5 \\ &= 500 \end{aligned}$$

c) Anzahl $= 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Für den ersten Ring gibt es 10 Möglichkeiten, für den zweiten nur noch 9 (die Ziffer vom ersten Ring darf nicht mehr vorkommen), für den dritten 8 (die Ziffern von Ring 1 und Ring 2 dürfen nicht mehr vorkommen).

b) Systematisches Probieren führt auf 11 Möglichkeiten:

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO	
					X	X	1
				X	X		2
			X		X		3
		X			X		4
	X				X		5
X					X		6
				X		X	7
			X			X	8
		X				X	9
	X					X	10
X						X	11

7)

URNE 1

URNE 2

a) $\xrightarrow{2/5}$ weiß $\xrightarrow{4/6}$ weiß

U1 U2

$$P(\text{2 weiße Kugeln}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

b)

$\xrightarrow{3/5}$ weiß $\xrightarrow{4/6}$ blau

$\xrightarrow{2/5}$ blau $\xrightarrow{2/6}$ weiß

U1 U2

$$P(\text{genau eine weiß}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6}$$
$$= \frac{12}{30} + \frac{4}{30}$$
$$= \frac{16}{30}$$
$$= \frac{8}{15}$$

c) Wir arbeiten mit dem Gegenereignis:

$$P(\text{mind. 1 blau}) = 1 - P(\text{keine blau})$$
$$= 1 - P(\text{alle weiß})$$
$$= 1 - \frac{4}{15}$$
$$= \frac{11}{15}$$

8) Wenn eine Zahl eine Null am Ende hat, so ist sie durch 2 und 5 teilbar. 2 und 5 sind in ihrer Primfaktorzerlegung enthalten.

Wenn eine Zahl zwei Nullen am Ende hat, so ist sie 2-mal jeweils durch 2 und 5 teilbar. 2 und 5 sind 2-mal in der Primfaktorzerlegung.

allgemein:
Wenn eine Zahl n Nullen hat am Ende, so ist sie n-mal durch jeweils 2 und 5 teilbar und sie hat in ihrer Primfaktorzerlegung n-mal 2 und 5.

Die Definition der Fakultät ähnelt der Primfaktorzerlegung:

$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Die Zahl 20! hat bedingt durch die Faktoren 5, 10, 15, 20 jeweils eine 5 in der Primfaktorzerlegung. Da die anderen Faktoren durch 5 nicht teilbar sind, sind es insgesamt vier 5en.
Zu jeder der 5en kann eine 2 gefunden werden (z.B. 2, 4, 6, 8, 12).
=> Die Primfaktorzerlegung hat vier 5en und mind. vier 2en
=> vier Nullen

9) a) Es gibt jeweils 6 Ergebnisse bei einem Wurf. Und es wird 3-mal geworfen:

Anzahl $= 6^3 = 216$

b) Der Sachverhalt kann als Bernoullikette mit $n = 3$ und $p = 0{,}5$ und einer geraden Zahl als Treffer angesehen werden.

$$P(X=3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}5^0 \cdot 0{,}5^3$$
$$= 0{,}5^3$$
$$= 0{,}125 \quad (\text{oder } \tfrac{1}{8})$$

c) $$P(X=1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^2$$
$$= 3 \cdot 0{,}5^3$$
$$= 0{,}375 \quad (\text{oder } \tfrac{3}{8})$$

10) a)

Gewinn / Verlust	-2 €	0	$+6$ €
Wahrscheinlichkeit	$1/2$	$1/3$	$1/6$

-2 € : 3 von 6 Ergebnissen (1, 2, 3)
0 : 2 von 6 Ergebnissen (4, 5)
$+6$ €: 1 von 6 Ergebnissen (6)

$$\mu = -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 6 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

Auf lange Sicht ist weder Gewinn noch Verlust zu erwarten.

b)

Gewinn / Verlust	-2 €	0	$+a$ €
Wahrs.	$1/2$	$1/3$	$1/6$

$$\mu = -2 \cdot \frac{1}{2} + 0 + a \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$-1 + \frac{a}{6} = 1$$

$$\frac{a}{6} = 2$$

$$a = 12$$

Da man a € Gewinn und den Einsatz in Höhe von 2 € zurück erhält, sollte man $12 + 2 = 14$ € erhalten.

11 a) Es handelt sich um eine Bernoulli-Ketten, da dasselbe Experiment 30-mal durchgeführt wird. Jedes Mal gibt es nur 2 Ausgänge: Kopf und Zahl. Treffer ist „Kopf"

$$P(X=2) = \binom{30}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^{28}$$

b) Man könnte damit ausrechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit man 9-mal Kopf erhält.

c) $\mu = n \cdot p = 30 \cdot 0{,}6 = 18$

$Var = n \cdot p \cdot (1-p) = 30 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 7{,}2$

$\sigma = \sqrt{7{,}2}$

12) Histogramm a kann es nicht sein, da der Wert mit der höchsten Wahrscheinlichkeit $k=2$ ist. Es sollte jedoch ca. $\mu = n \cdot p = 3{,}5$ sein.

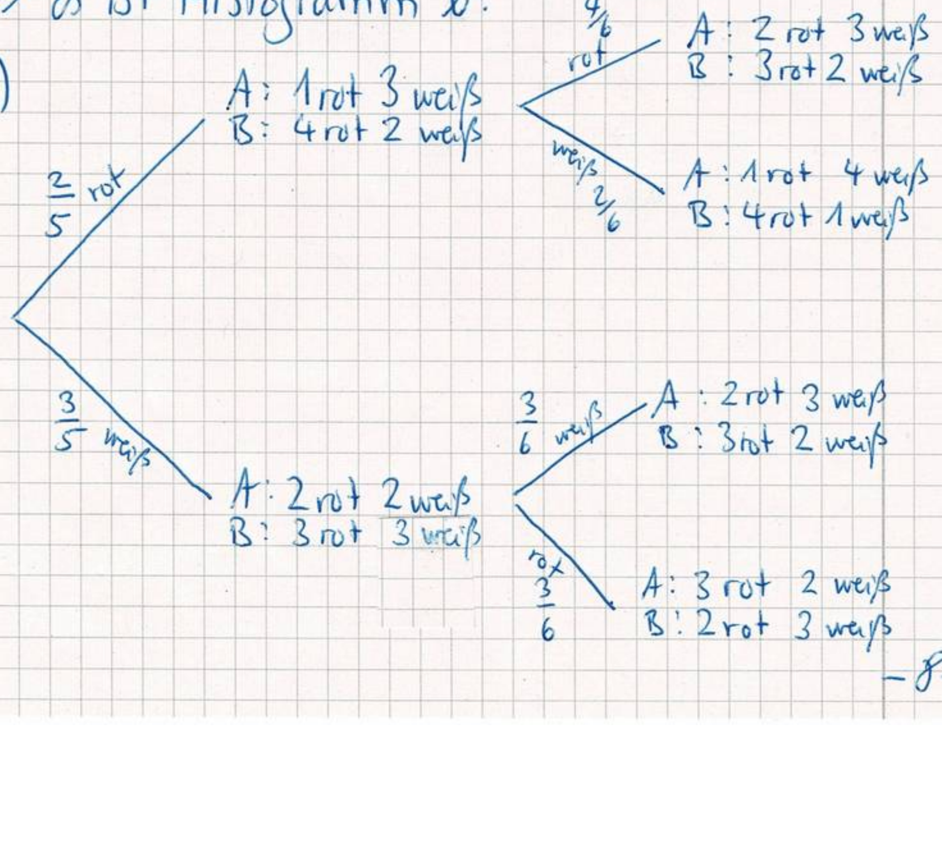
Histogramm c kann es nicht sein. Wir kontrollieren $P(X=5)$:

$$
\begin{aligned}
P(X=5) &= \binom{5}{5} \cdot 0{,}7^5 \\
&= 0{,}7^5 \\
&= 0{,}7^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}7 \\
&= 0{,}49 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}7 \\
&< 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 \\
&= 0{,}25 \cdot 0{,}7 \\
&= 0{,}175
\end{aligned}
$$

Bei Histogramm c ist der Wert jedoch ca. 0,35 ↯

$\Rightarrow$ Es ist Histogramm b.

13) a)



Möglichkeiten: 2 rot 3 weiß
1 rot 4 weiß
3 rot 2 weiß

b) $P(2\text{ rot }3\text{ weiß}) = \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{6}$

$= \frac{8}{30} + \frac{9}{30}$

$= \frac{17}{30}$

Gegenereignis: $P(\text{Geg.}) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$

Antwort: Ereignis E hat eine höhere Wahrscheinlichkeit.

14) a) $\mu = -2\cdot 0{,}25 + 1\cdot 0{,}25 + 2\cdot 0{,}5$
$= -0{,}5 + 0{,}25 + 1$
$= 0{,}75$

b) Wir betrachten die Möglichkeiten:

Wert 1	Wert 2	Summe
−2	−2	−4
−2	1	−1
−2	2	0
1	−2	−1
1	1	0
1	2	3
2	−2	0
2	1	3
2	2	4

Zu betrachten sind also die Fälle

Wert 1	Wert 2
−2	−2
−2	1
1	−2

$P(-2 \text{ und } -2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(-2 \text{ und } 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

$P(1 \text{ und } -2) = \frac{1}{16}$

$\Rightarrow P(\text{neg. Summe}) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

15 a)

$P(\text{nur in den letzten 2}) = 0{,}75^8 \cdot 0{,}25^2$

b) Es gilt: Der Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit ist ca. $\mu = n \cdot p$.
Das wäre hier $\mu = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung muss insgesamt von der Mitte aus nach links verschoben sein.
Das ist nur bei I der Fall.

II kann es nicht sein, da eine Binomialverteilung nicht gleichverteilt ist.
III kann es nicht sein, da der höchste Wert bei ca. 5 liegt.

16) a) $P(X_1=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}8^1\cdot 0{,}2^4$

b) $1-\left(\binom{5}{3}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+\binom{5}{4}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2+\binom{5}{5}\cdot 0{,}8^5\right)$

$\uparrow$ 3 Treffer $\quad\uparrow$ 4 Treffer $\quad\uparrow$ 5 Treffer

Ereignis: Man hat höchstens 2 Treffer. Da die Wahrs. für 3, 4 und 5 Treffer von 1 abgezogen werden, betrachten wir das Gegenereignis dazu, also keinen, 1 oder 2 Treffer. Kurz zusammengefasst: höchstens 2 Treffer.

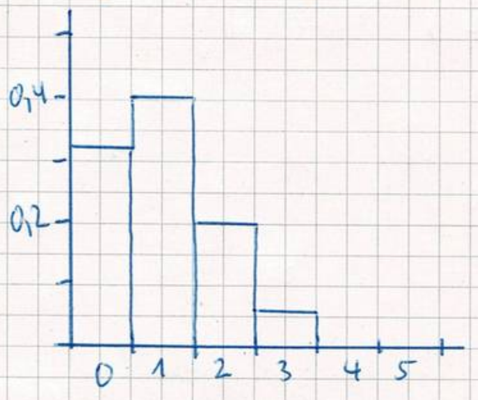
c) Die Verteilung von Abb. 38 müsste symmetrisch zu der von Abb. 37 sein.

X_1	X_2
$P(X_1=0)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}8^0\cdot 0{,}2^5$	$P(X_2=0)=\binom{5}{0}\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5$
$P(X_1=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}8^1\cdot 0{,}2^4$	$P(X_2=1)=\binom{5}{1}\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4$
$P(X_1=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}8^2\cdot 0{,}2^3$	$P(X_2=2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3$
$P(X_1=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2$	$P(X_2=3)=\binom{5}{3}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2$
$P(X_1=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2^1$	$P(X_2=4)=\binom{5}{4}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^1$
$P(X_1=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}8^5\cdot 0{,}2^0$	$P(X_2=5)=\binom{5}{5}\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0$

Man sieht:

$P(X_1=0)=P(X_2=0)$	$P(X_1=3)=P(X_2=2)$
$P(X_1=1)=P(X_2=4)$	$P(X_1=4)=P(X_2=1)$
$P(X_1=2)=P(X_2=3)$	$P(X_1=5)=P(X_2=0)$

Daraus ergibt sich für Abb. 38:



17a) Es gilt $n = 2$ und $p = 0{,}4$

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$
$$= \binom{2}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^2 + \binom{2}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^1$$
$$= 0{,}6^2 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 2$$
$$= 0{,}36 + 0{,}48$$
$$= 0{,}84$$

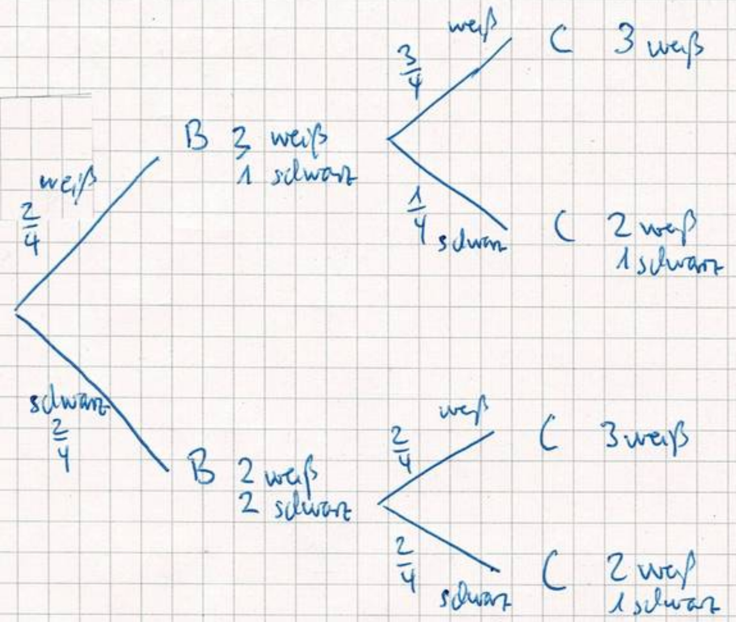
Alternative:

$$P(X \leq 1) = 1 - P(X=2)$$
$$= 1 - \binom{2}{2} \cdot 0{,}4^2$$
$$= 1 - 0{,}16$$
$$= 0{,}84$$

b) $P(X \neq 0) + P(X \neq 1) + P(X \neq 2)$

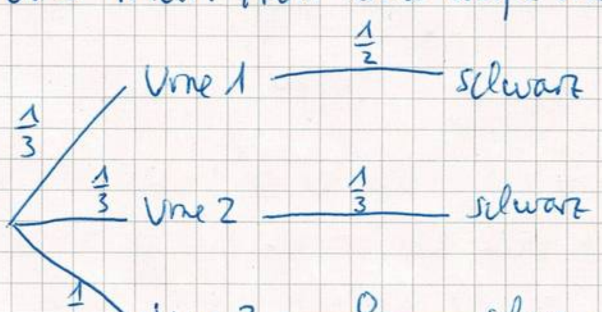
$$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=0) + P(X=2) + P(X=0) + P(X=1)$$
$$= \underbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)}_{1} + \underbrace{P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)}_{1}$$
$$= 1 + 1$$
$$= 2$$

18 a)



$$P(2\text{ weiß und }1\text{ schwarz}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

b) Es gibt 2 mögliche Fälle:
Man zieht eine schwarze Kugel und gewinnt a €.
Oder man zieht eine weiße und verliert 1 €.



$$P(\text{schwarz}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}$$

-1 €	$+a$ €
$^{13}/_{18}$	$^{5}/_{18}$

$$\mu = -1 \cdot \frac{13}{18} + a \cdot \frac{5}{18} = 0$$

$$\frac{5}{18} a = \frac{13}{18}$$

$$5a = 13$$

$$a = 2{,}6$$

Da wir den Einsatz berücksichtigen müssen, beträgt die Auszahlung 3,60 €.

19) a) $P(X=5) \approx 0{,}18$
$P(X=6) \approx 0{,}21$
$P(X=7) \approx 0{,}17$

$$P(5 \leq X \leq 7) = P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$
$$\approx 0{,}18 + 0{,}21 + 0{,}17$$
$$= 0{,}56$$

b) $\mu = n \cdot p = 6$
$Var = n \cdot p \cdot (1-p) = 3{,}6$

$$\underline{n \cdot p} = 6$$
$$\overline{n \cdot p} \cdot (1-p) = 3{,}6$$
$$6 \cdot (1-p) = 3{,}6$$
$$1-p = 0{,}6$$
$$p = 0{,}4$$

$\Rightarrow \mu = n \cdot p = 6$
$n \cdot 0{,}4 = 6 \Rightarrow n = 15$

20) a) $p + 2p + P(\text{gelb}) = 1$

$3p + P(\text{gelb}) = 1$

$P(\text{gelb}) = 1 - 3p$

P(gelb) muss größer als 0 und kleiner als 1 sein

$\Rightarrow \quad 0 \leq p \leq \frac{1}{3}$

b) Es handelt sich um eine Bernoullikette mit n = 2 und „Rot" als Treffer.

$P(\text{rot}) = 2p$

$P(\text{nicht rot}) = (1-2p)$

Wir arbeiten mit dem Gegenereignis: keinmal rot

$$\begin{aligned} P(\text{mind. 1 rot}) &= 1 - P(\text{nie rot}) \\ &= 1 - \binom{2}{0} \cdot 2p^0 \cdot (1-2p)^2 \\ &= 1 - (1-2p)^2 \\ &= 1 - (1 - 4p + 4p^2) \\ &= 1 - 1 + 4p - 4p^2 \\ &= 4p - 4p^2 \checkmark \end{aligned}$$

21) (I) $P(X=4) = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)^1$

(II) $P(\text{nur die ersten 2}) = p^2 \cdot (1-p)^3$