# LÖSUNGEN

1a) $A(1|2)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 2$

$$a + b + c = 2$$

$B(2|5)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 5$

$$2^2 \cdot a + 2 \cdot b + c = 5$$
$$4a + 2b + c = 5$$

$C(3|12)$ auf $f \Rightarrow f(3) = 12$

$$3^2 \cdot a + 3 \cdot b + c = 12$$
$$9a + 3b + c = 12$$

I. $a + b + c = 2 \quad |-a \,|-b$
II. $4a + 2b + c = 5$
III. $9a + 3b + c = 12$

I. $c = 2 - a - b \quad |$ in II & III einsetzen
II. $4a + 2b + c = 5$
III. $9a + 3b + c = 12$

II. $4a + 2b + 2 - a - b = 5 \quad |-2$
III. $9a + 3b + 2 - a - b = 12 \quad |-2$

II. $3a + b = 3 \quad |-3a$
III. $8a + 2b = 10$

II. $b = 3 - 3a \quad |$ in III einsetzen
III. $8a + 2b = 10$

III. $8a + 2 \cdot (3 - 3a) = 10$
$8a + 6 - 6a = 10 \quad |-6$

$$2a = 4 \quad | :2$$
$$a = 2$$
$$\Rightarrow b = 3 - 3 \cdot 2 = 3 - 6 = -3$$
$$\Rightarrow c = 2 - 2 - (-3) = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 3x + 3$$

b) $A(-1/-5)$ auf $f \Rightarrow f(-1) = -5$
$$(-1)^2 \cdot a + (-1) \cdot b + c = -5$$
$$a - b + c = -5$$
$B(1/3)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 3$
$$a + b + c = 3$$
$C(2/10)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 10$
$$2^2 \cdot a + 2 \cdot b + c = 10$$
$$4a + 2b + c = 10$$

I. $a - b + c = -5 \quad | +b \; | -a$
II. $a + b + c = 3$
III. $4a + 2b + c = 10$

I. $c = -5 + b - a$ | in II & III einsetzen
II. $a + b + c = 3$
III. $4a + 2b + c = 10$

II. $a + b - 5 + b - a = 3 \quad | +5$
III. $4a + 2b - 5 + b - a = 10 \quad | +5$

II. $2b = 8 \quad | :2$
III. $3a + 3b = 15$

II. $b = 4 \quad |$ in III einsetzen
III. $3a + 3b = 15$

III. $3a + 3 \cdot 4 = 15$
$3a + 12 = 15 \quad |-12$
$3a = 3 \quad |:3$
$a = 1$
$\Rightarrow c = -5 + 4 - 1 = -2$

$\Rightarrow f(x) = x^2 + 4x - 2$

c) $A(1|-2)$ auf $f \Rightarrow f(1) = -2$
$a + b + c = -2$
$B(-1|8)$ auf $f \Rightarrow f(-1) = 8$
$(-1)^2 \cdot a + (-1) \cdot b + c = 8$
$a - b + c = 8$
$C(3|-4)$ auf $f \Rightarrow f(3) = -4$
$3^2 \cdot a + 3 \cdot b + c = -4$
$9a + 3b + c = -4$

I. $a + b + c = -2 \quad |-b \;|-a$
II. $a - b + c = 8$
III. $9a + 3b + c = -4$

I. $c = -2 - b - a \quad |$ in II & III einsetzen
II. $a - b + c = 8$
III. $9a + 3b + c = -4$

II. $a - b - 2 - b - a = 8 \quad |+2$
III. $9a + 3b - 2 - b - a = -4 \quad |+2$

$\text{II.}\quad -2b = 10 \quad |:(-2)$
$\text{III.}\quad 8a + 2b = -2$

$\text{II.}\quad b = -5 \quad |$ in III einsetzen
$\text{III.}\quad 8a + 2b = -2$

$\text{III.}\quad 8a + 2\cdot(-5) = -2$
$8a - 10 = -2 \quad |+10$
$8a = 8 \quad |:8$
$a = 1$
$\Rightarrow c = -2-(-5)-1 = 2$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 2$

d) $A(1|6)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 6$
$a + b + c = 6$
$B(2|16)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 16$
$2^2 \cdot a + 2\cdot b + c = 16$
$4a + 2b + c = 16$
$C(5|70)$ auf $f \Rightarrow f(5) = 70$
$5^2 \cdot a + 5\cdot b + c = 70$
$25a + 5b + c = 70$

$\text{I.}\quad a + b + c = 6 \quad |-a|-b$
$\text{II.}\quad 4a + 2b + c = 16$
$\text{III.}\quad 25a + 5b + c = 70$

$\text{I.}\quad c = 6 - a - b \quad |$ in II & III einsetzen
$\text{II.}\quad 4a + 2b + c = 16$
$\text{III.}\quad 25a + 5b + c = 70$

II. $4a + 2b + 6 - a - b = 16 \quad | -6$
III. $25a + 5b + 6 - a - b = 70 \quad | -6$

II. $3a + b = 10 \quad | -3a$
III. $24a + 4b = 64$

II. $b = 10 - 3a \quad |$ in III einsetzen
III. $24a + 4b = 64$

III. $24a + 4 \cdot (10 - 3a) = 64$
$24a + 40 - 12a = 64 \quad | -40$
$12a = 24 \quad | :12$
$a = 2$
$\Rightarrow b = 10 - 3 \cdot 2 = 10 - 6 = 4$
$\Rightarrow c = 6 - 2 - 4 = 0$
$\Rightarrow f(x) = 2x^2 + 4x$

e) $A(1|11)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 11$
$a + b + c = 11$
$B(2|23)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 23$
$2^2 \cdot a + 2 \cdot b + c = 23$
$4a + 2b + c = 23$
$C(1{,}5|16)$ auf $f \Rightarrow f(1{,}5) = 16$
$1{,}5^2 \cdot a + 1{,}5\, b + c = 16$
$2{,}25a + 1{,}5b + c = 16$

I. $a + b + c = 11 \quad | -a \,| -b$
II. $4a + 2b + c = 23$
III. $2{,}25a + 1{,}5b + c = 16$

I. $c = 11 - a - b$ | in II & III einsetzen
II. $4a + 2b + c = 23$
III. $2{,}25a + 1{,}5b + c = 16$

II. $4a + 2b + 11 - a - b = 23$ | $-11$
III. $2{,}25a + 1{,}5b + 11 - a - b = 16$ | $-11$

II. $3a + b = 12$ | $-3a$
III. $1{,}25a + 0{,}5b = 5$

II. $b = 12 - 3a$ | in III einsetzen
III. $1{,}25a + 0{,}5b = 5$

III. $1{,}25a + 0{,}5 \cdot (12 - 3a) = 5$
$1{,}25a + 6 - 1{,}5a = 5$ | $-6$
$-0{,}25a = -1$ | $\cdot(-4)$
$a = 4$
$\Rightarrow b = 12 - 3 \cdot 4 = 12 - 12 = 0$
$\Rightarrow c = 11 - 4 - 0 = 7$
$\Rightarrow f(x) = 4x^2 + 7$

2a) $S(3|4)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-3)^2 + 4$
$A(2|3)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 3$
$a \cdot (2-3)^2 + 4 = 3$
$a \cdot (-1)^2 + 4 = 3$
$a + 4 = 3$
$a = -1$
$\Rightarrow f(x) = -1 \cdot (x-3)^2 + 4$
$= -1 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 4$
$= -x^2 + 6x - 9 + 4$
$= -x^2 + 6x - 5$

b) $S(-1|4)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x+1)^2 + 4$

$A(2|3)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 3$

$$a \cdot (2+1)^2 + 4 = 3$$
$$a \cdot 3^2 + 4 = 3$$
$$9a + 4 = 3$$
$$9a = -1$$
$$a = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{9} \cdot (x+1)^2 + 4$$
$$= -\frac{1}{9} \cdot (x^2 + 2x + 1) + 4$$
$$= -\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} + 4$$
$$= -\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{35}{9}$$

c) $S(5|1)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-5)^2 + 1$

$A(2|3)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 3$

$$a \cdot (2-5)^2 + 1 = 3$$
$$a \cdot (-3)^2 + 1 = 3$$
$$9a + 1 = 3$$
$$9a = 2$$
$$a = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{9} \cdot (x-5)^2 + 1$$
$$= \frac{2}{9} \cdot (x^2 - 10x + 25) + 1$$
$$= \frac{2}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{50}{9} + 1$$
$$= \frac{2}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{59}{9}$$

d) $S(2|5)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a(x-2)^2+5$

$A(2|3)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 3$

$$a \cdot (2-2)^2 + 5 = 3$$
$$a \cdot 0^2 + 5 = 3$$
$$5 = 3 \ \lightning$$

Es gibt keine solche Funktion.

e) $S(5|3)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-5)^2+3$

$A(2|3)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 3$

$$a \cdot (2-5)^2 + 3 = 3$$
$$a \cdot (-3)^2 + 3 = 3$$
$$9a + 3 = 3$$
$$9a = 0$$
$$a = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \cdot (a-5)^2 + 3 = 3$$

Es gibt keine solche quadratische Funktion.

3a) $f(x) = 2 \cdot (x+2)^2 + 3$ Scheitelpunktsform

$$= 2 \cdot (x^2 + 4x + 4) + 3$$
$$= 2x^2 + 8x + 8 + 3$$
$$= 2x^2 + 8x + 11$$

b) $f(x) = 3x^2 + 6x + 12$ Normalform

$$= 3 \cdot (x^2 + 2x + 4)$$
$$= 3 \cdot ((x+1)^2 + 4 - 1)$$
$$= 3 \cdot ((x+1)^2 + 3)$$
$$= 3(x+1)^2 + 9$$

c) $f(x) = x^2 - 8x + 10$ Normalform

$= (x-4)^2 + 10 - 16$

$= (x-4)^2 - 6$

d) $f(x) = x^2 + 9x + 0$ Normalform

$= (x+4{,}5)^2 + 0 - 4{,}5^2$

$= (x+4{,}5)^2 - 20{,}25$

e) $f(x) = x^2 + 12$ Scheitelp.- und Normalform

$= (x-0)^2 + 12$

f) $f(x) = -2 \cdot (x+5)^2 + 9$ Scheitelpunktsform

$= -2\,(x^2 + 10x + 25) + 9$

$= -2x^2 - 20x - 50 + 9$

$= -2x^2 - 20x - 41$

g) $f(x) = -(x-7)^2 + 2$ Scheitelpunktsform

$= -(x^2 - 14x + 49) + 2$

$= -x^2 + 14x - 49 + 2$

$= -x^2 + 14x - 47$

h) $f(x) = 3x^2 + 12x + 15$ Normalform

$= 3 \cdot (x^2 + 4x + 5)$

$= 3 \cdot ((x+2)^2 + 5 - 4)$

$= 3 \cdot ((x+2)^2 + 1)$

$= 3 \cdot (x+2)^2 + 3$

i) $f(x) = -2x^2 + 6x - 8$ Normalform

$= -2 \cdot (x^2 - 3x + 4)$

$= -2 \cdot ((x-1{,}5)^2 + 4 - 2{,}25)$

$= -2\,((x-1{,}5)^2 + 1{,}75)$

$= -2\,(x-1{,}5)^2 - 3{,}5$

j) $f(x) = -3x^2 + 6x + 18$ Normalform

$= -3 \cdot (x^2 - 2x - 6)$

$= -3 \cdot ((x-1)^2 - 6 - 1)$

$= -3 \cdot ((x-1)^2 - 7)$

$= -3(x-1)^2 + 21$

4 a) $S(7/4)$

b) $S(-2/-7)$

c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$

$= 2 \cdot (x^2 + 2x + 3)$

$= 2 \cdot ((x+1)^2 + 3 - 1)$

$= 2 \cdot ((x+1)^2 + 2)$

$= 2(x+1)^2 + 4$

$S(-1/4)$

d) $f(x) = 4x^2 + 12x - 12$

$= 4 \cdot (x^2 + 3x - 3)$

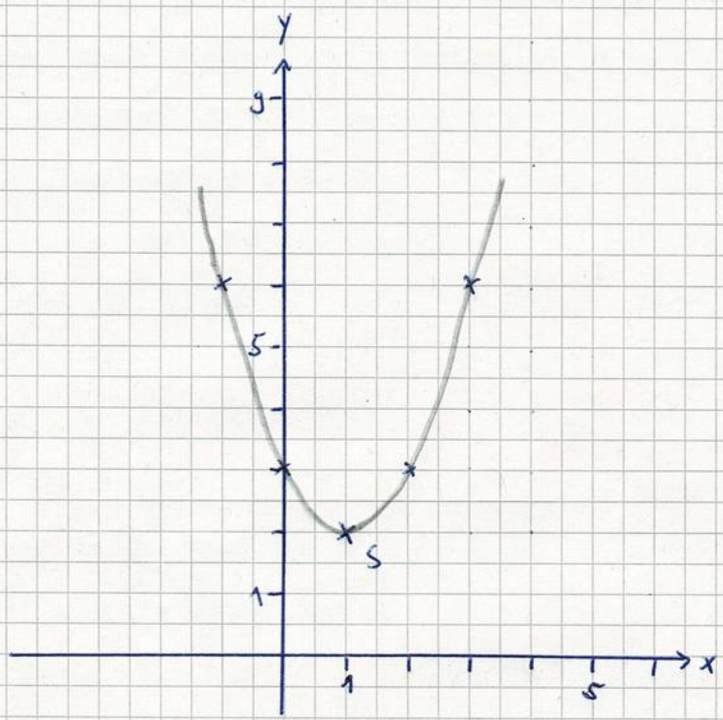
$= 4 \cdot ((x+1{,}5)^2 - 3 - 2{,}25)$

$= 4 \cdot ((x+1{,}5)^2 - 5{,}25)$

$= 4 \cdot (x+1{,}5)^2 - 21$

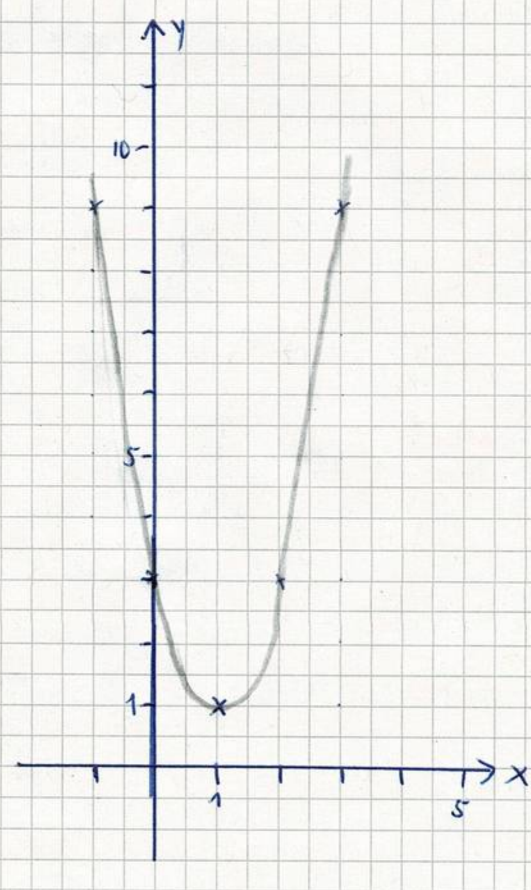
$S(-1{,}5/-21)$

5a)

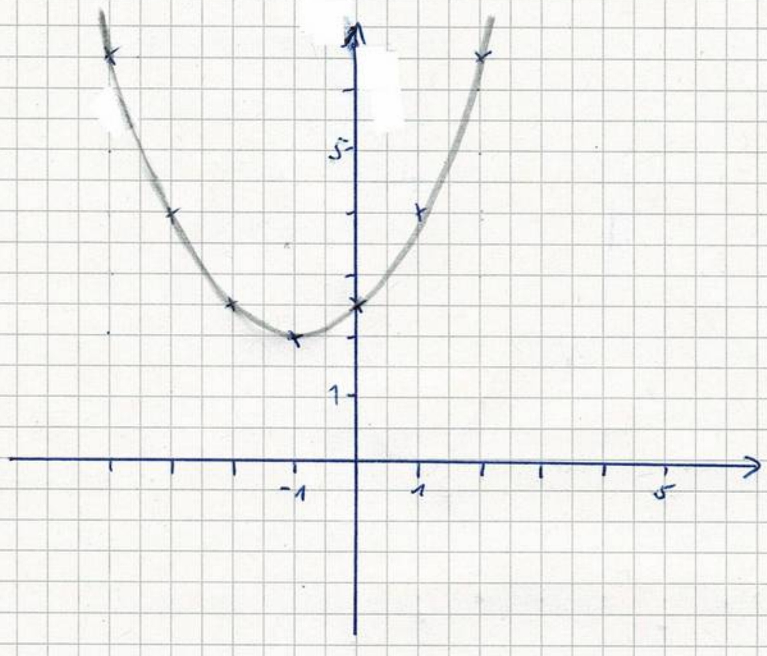



b)

$f(x) = 2x^2 - 4x + 3$
$= 2(x^2 - 2x + 1{,}5)$
$= 2((x-1)^2 + 1{,}5 - 1)$
$= 2((x-1)^2 + 0{,}5)$
$= 2(x-1)^2 + 1$



c)




6a) Scheitelpunkt $S(4|5) \Rightarrow f(x) = a(x-4)^2 + 5$

$A(5|3)$ auf $f \Rightarrow f(5) = 3$

$$a(5-4)^2 + 5 = 3$$
$$a \cdot 1^2 + 5 = 3$$
$$a + 5 = 3$$
$$a = -2$$

$\Rightarrow f(x) = -2 \cdot (x-4)^2 + 5$

b) Scheitelpunkt $S(1|2) \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + 2$

$A(2|3)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 3$

$$a(2-1)^2 + 2 = 3$$
$$a \cdot 1^2 + 2 = 3$$
$$a + 2 = 3$$
$$a = 1$$

$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 2$

7a) $S(-3|1)$

b) $f(x) = 2 \cdot (x+3)^2 + 1$
$= 2(x^2+6x+9)+1$
$= 2x^2+12x+18+1$
$= 2x^2+12x+19$

c) $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 19$
$= 2 \cdot 4 + 24 + 19$
$= 51$
$\Rightarrow y = 51$

d) $f(x) = 2 \cdot (x+3)^2 + 1 \underline{+1}$
$= 2 \cdot (x+3)^2 + 2$

8a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$
$= (x-3)^2 + 2 - 9$
$= (x-3)^2 - 7$

b) $S(3|-7)$

c) Wenn $A(1|-2)$ auf $f$ liegt, so müsste gelten: $f(1) = -2$

$(-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 2 = -2$
$1 + 6 + 2 = -2$
$9 = -2$ ↯

$\Rightarrow$ A liegt nicht auf dem Graphen von $f$.

d) $f(x) = (x-3\underline{+1})^2 - 7$
$= (x-2)^2 - 7$

9a) $S(2|4)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 4$

$A(5|9)$ liegt auf $f \Rightarrow f(5) = 9$

$$a \cdot (5-2)^2 + 4 = 9$$
$$a \cdot 3^2 + 4 = 9$$
$$9a + 4 = 9 \quad | -4$$
$$9a = 5$$
$$a = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{9} (x-2)^2 + 4$$
$$= \frac{5}{9} \cdot (x^2 - 4x + 4) + 4$$
$$= \frac{5}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{20}{9} + 4$$
$$= \frac{5}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{56}{9}$$

b) Der Punkt, wo die y-Achse geschnitten wird, hat die Koordinaten $P(0|y)$.
Wir suchen nun y:

$$f(0) = \frac{5}{9} \cdot 0^2 - \frac{20}{9} \cdot 0 + \frac{56}{9} = \frac{56}{9}$$

$$\Rightarrow P\left(0 \middle| \frac{56}{9}\right)$$

c) Wenn B auf f liegt, so gilt $f(3) = 8$

$$\frac{5}{9} \cdot (3-2)^2 + 4 = 8$$
$$\frac{5}{9} \cdot 1^2 + 4 = 8$$
$$\frac{5}{9} + 4 = 8$$
$$4\frac{5}{9} = 8 \quad ↯$$

$\Rightarrow$ B liegt nicht auf f

d) $f(x) = \frac{5}{9} \cdot (x - 2 - 1)^2 + 4 + 2$

$= \frac{5}{9} \cdot (x-3)^2 + 6$

10 a) $S(-2|-5)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x+2)^2 - 5$

$A(0|2)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 2$

$a \cdot (0+2)^2 - 5 = 2$

$a \cdot 2^2 - 5 = 2$

$4a - 5 = 2$

$4a = 7$

$a = 1{,}75$

$\Rightarrow f(x) = 1{,}75 \cdot (x+2)^2 - 5$

$= 1{,}75 \cdot (x^2 + 4x + 4) - 5$

$= 1{,}75x^2 + 7x + 7 - 5$

$= 1{,}75x^2 + 7x + 2$

b) $S(2|5)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 - 5$

$A(0|2)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 2$

$a \cdot (0-2)^2 - 5 = 2$

$a \cdot (-2)^2 - 5 = 2$

$4a - 5 = 2$

$a = 1{,}75$

$\Rightarrow f(x) = 1{,}75 \cdot (x-2)^2 - 5$

11a) $f(x) = -0{,}1x^2 + 2x + 0{,}5$

$= -0{,}1 \cdot (x^2 - 20x - 5)$

$= -0{,}1 \cdot ((x-10)^2 - 5 - 100)$

$= -0{,}1 \cdot ((x-10)^2 - 105)$

$= -0{,}1 \cdot (x-10)^2 + 10{,}5$

$\Rightarrow S(10/10{,}5)$

$\Rightarrow$ größte Höhe: 10,5 m

b) $f(0) = 0{,}5$ $\Rightarrow$ Beginn: 0,5 m

$f(18) = -0{,}1 \cdot (18-10)^2 + 10{,}5$

$= -0{,}1 \cdot 8^2 + 10{,}5$

$= -0{,}1 \cdot 64 + 10{,}5$

$= -6{,}4 + 10{,}5$

$= 4{,}1$ $\Rightarrow$ Ende: 4,10 m

c) $f(2) = -0{,}1 \cdot (2-10)^2 + 10{,}5$

$= -0{,}1 \cdot (-8)^2 + 10{,}5$

$= -0{,}1 \cdot 64 + 10{,}5$

$= -6{,}4 + 10{,}5$

$= 4{,}1$

$\Rightarrow$ In 4,10 m Höhe, also $4{,}10 - 1{,}75 = 2{,}35$ m über seinem Kopf

12a) $S(50|24)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-50)^2 + 24$

$A(0|0)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 0$

$a \cdot (0-50)^2 + 24 = 0$

$a \cdot 50^2 + 24 = 0$

$2500a + 24 = 0$

$2500a = -24$

$a = -\frac{24}{2500} = -\frac{6}{625}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{6}{625} \cdot (x-50)^2 + 24$$
$$= -\frac{6}{625} \cdot (x^2 - 100x + 2500) + 24$$
$$= -\frac{6}{625} x^2 + \frac{600}{625} x - 24 + 24$$
$$= -\frac{6}{625} x^2 + \frac{24}{25} x$$

b) $f(40) = -\frac{6}{625} \cdot 40^2 + \frac{24}{25} \cdot 40$
$= 23{,}04$

$23{,}04 - 1{,}75 = 21{,}29$ m

$\Rightarrow$ Der Bogen ist 21,29 m über seinem Kopf.

c) $f(5) = -\frac{6}{625} \cdot 5^2 + \frac{24}{25} \cdot 5 = 4{,}56$

$\Rightarrow$ Ja, er konnte!

d) Parabeln sind symmetrisch zum Scheitelpunkt.
$\Rightarrow D(100/0)$

13) $g(x) = 2 \cdot (x-2)^2 - 3$

14) Mitte zwischen A und B: $C(0/y)$

1 Scheitelpunkt $S(0/1) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-0)^2 + 1$
$A(-2|3)$ auf $f \Rightarrow f(-2) = 3$
$a \cdot (-2-0)^2 + 1 = 3$
$4a + 1 = 3$
$4a = 2$
$a = 0{,}5$

$$\Rightarrow f(x) = 0{,}5 \cdot (x-0)^2 + 1$$
$$= 0{,}5 \cdot x^2 + 1$$

② Scheitelpunkt $S(0|0) \Rightarrow f(x) = a \cdot (x-0)^2 + 0$

$A(-2|3)$ auf $f \Rightarrow f(-2) = 3$

$$a \cdot (-2-0)^2 = 3$$
$$4a = 3$$
$$a = 0{,}75$$

$$\Rightarrow f(x) = 0{,}75 \cdot (x-0)^2 + 0$$
$$= 0{,}75\,x^2$$