LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) gesucht: Maximum

$$f'(x) = 0{,}54x \cdot e^{-0{,}12x} + 0{,}27x^2 \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= 0{,}54x\, e^{-0{,}12x} + (-0{,}0324x^2) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= (-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot e^{-0{,}12x}$$

$$f''(x) = (-0{,}0648x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x} + (-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= (-0{,}0648x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x} + (0{,}003888x^2 - 0{,}0648x) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= (0{,}003888x^2 - 0{,}1296x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x}$$

N.B.: $f'(x) = 0$

$$(-0{,}0324x^2 + 0{,}54x) \cdot e^{-0{,}12x} = 0$$
$$-0{,}0324x^2 + 0{,}54x = 0 \text{ oder } e^{-0{,}12x} = 0 \quad ↯$$

(GTR...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 16{,}\overline{6}$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f''(0) = 0{,}54 \cdot e^0 = 0{,}54 > 0$$
$$\Rightarrow \text{TP bei } x = 0$$
$$f''(16{,}\overline{6}) = -0{,}073 < 0$$
$$\Rightarrow \text{HP bei } x = 16{,}\overline{6}$$

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(16{,}\overline{6}) = 10{,}15$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Das Maximum wird nach $16\frac{2}{3}$ min erreicht mit 10,15 Personen pro Minute.

b) $f(x) = 3$

$0{,}27x^2 e^{-0{,}12x} = 3$

(GTR ...)

$x_1 = 4{,}3195$

$x_2 = 42{,}3774$

Im Zeitraum vom Anfang bis zur etwa 4. Minute und nach der ca. 42. Minute kommen weniger als 3 Personen pro Minute.

c) ① $F'(x) = 0 - \left((4{,}5x + 37{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} + (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}\right)$

$= -\left((4{,}5x + 37{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} + (-0{,}27x^2 - 4{,}5x - 37{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}\right)$

$= -\left((-0{,}27x^2) \cdot e^{-0{,}12x}\right)$

$= 0{,}27x^2 \cdot e^{-0{,}12x}$

② $\lim_{x \to \infty} F(x) = \lim_{x \to \infty} \left(312{,}5 - \underbrace{(2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}}_{\text{läuft gegen } 0}\right) = 312{,}5$

Es sind $312{,}5 \approx 312$ Personen.

d) ① Anzahl der wartenden Personen:

$F(20) = 134{,}466$

Nach $x = 20$ kommen noch weitere Personen. Diese sind aber erst nach der betrachteten Person dran.

$134,466 : 6 = 22,411$

Es sind ungefähr 22 Minuten.

(11) Jetzt müssen die neu dazu gekommenen nach 19:20 Uhr mit berücksichtigt werden.

$F(x)$: Zahl der Personen, die insgesamt zum Zeitpunkt x gekommen sind (die draußen warten oder schon im Kino sind)
x : Zeit in Minuten ab 19 Uhr

$g(x) = 6 \cdot (x-20)$
Zahl der Personen, die insgesamt schon im Kino sind
x : Zeit in Minuten ab 19 Uhr
$x \geq 20$. Wir müssen $(x-20)$ als Faktor verwenden, damit x weiter die Zeit in Minuten ab 19 Uhr sein kann.

$h(x) = F(x) - 6 \cdot (x-20)$, $x \geq 20$
Anzahl der Personen, die vor dem Kino stehen zum Zeitpunkt x

gesucht: Max. von $h(x)$

$$h(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} - 6(x-20)$$
$$= 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} - 6x + 120$$
$$= -(2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} - 6x + 432,5$$
$$h'(x) = 0,27x^2 e^{-0,12x} - 6$$
$$h''(x) = (-0,0324x^2 + 0,54x) \cdot e^{-0,12x}$$

N.B: $h'(x) = 0$

$0{,}27x^2 e^{-0{,}12x} = 6$

(GTR ...)

$x_1 = -3{,}7616$ } außerhalb des Definitionsbereichs

$x_2 = 7{,}3087$

$x_3 = 31{,}8322$

H.B.: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$h''(31{,}83) \approx -0{,}34 < 0$

$\Rightarrow$ lok. Max bei $x = 31{,}83$

Ränder:

$h(20) = 134{,}466$

$h(31{,}83) = 158{,}474$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ Die größte Zahl wird nach 31,83 Minuten erreicht mit $158{,}47 \approx 158$ Wartenden.

(III) gesucht: Nullstellen

$h(x) = 0$

$-(2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x} - 6x + 432{,}5 = 0$

(GTR ...)

$x_1 = -9{,}37$ (außerhalb des Definitionsbereichs)

$x_2 = 71{,}635$

$\Rightarrow$ Die Schlange hat sich nach 71,635 Minuten aufgelöst.

e) $h_{neu}(x) = F(x) - a \cdot (x-50)$

Wir benutzen $(x-50)$, da der Kartenverkauf erst um 19:50 beginnt. Gesucht ist a.

Die Schlange soll um 20:30 abgebaut sein, also nach 90 Minuten.

$h_{neu}(90) = 0$

$\Rightarrow F(90) - a \cdot (90-50) = 0$

$312{,}5 - (2{,}25 \cdot 90^2 + 37{,}5 \cdot 90 + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12 \cdot 90} - 90a + 50a = 0$

$312{,}5 - (2{,}25 \cdot 90^2 + 37{,}5 \cdot 90 + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12 \cdot 90} - 40a = 0$

$312{,}053 - 40a = 0$

$-40a = -312{,}053$

$a = 7{,}8$

$\Rightarrow$ Es müssen 7,8 Personen pro Minute sein.

2a) gesucht: Maximum

$f'(x) = 20 \cdot e^{-0{,}5t} + 20t \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= 20 \cdot e^{-0{,}5t} + (-10t) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= (-10t + 20) \cdot e^{-0{,}5t}$

$f''(x) = -10 \cdot e^{-0{,}5t} + (-10t+20) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= -10 \cdot e^{-0{,}5t} + (5t - 10) \cdot e^{-0{,}5t}$

$= (5t - 20) \cdot e^{-0{,}5t}$

N.B.: $f'(x) = 0$

$(-10t + 20) \cdot e^{-0{,}5t} = 0$

$-10t + 20 = 0$ oder $e^{-0{,}5t} = 0$ ↯

$10t = 20$

$t = 2$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2) = -10 \cdot e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ lok. Max. bei $x = 2$

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(2) = 14{,}715$

$f(12) = 0{,}5949$

Das gesuchte Maximum liegt nach 2 h und beträgt 14,715 mg/l.

b) $f(x) = 4$

$20t \cdot e^{-0{,}5t} = 4$

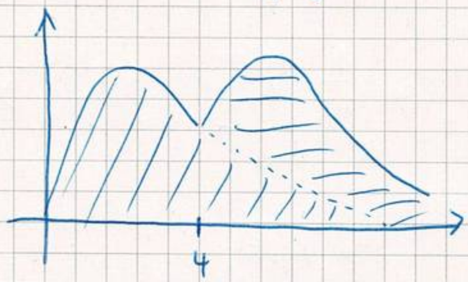
(GTR ...)

$x_1 = 0{,}22366$

$x_2 = 7{,}1543$

Die gesuchte Zeitspanne liegt zwischen 0,22366 h (≈ 13 Minuten) nach der Einnahme bis 7,1543 h nach der Einnahme.

c) Es ergibt sich die folgende Situation:



/// Ergebnis der ersten Einnahme
≡ zusätzl. zweite Einnahme

6 h nach der ersten Einnahme ergibt sich
die maximale Konzentration der beim 2.
Mal eingenommenen Substanz.
Insgesamt ergibt sich:

$f(2) = 14,715 \ ^{mg}/_{l}$ (von der 2. Einnahme)

$f(6) = 5,974 \ ^{mg}/_{l}$ (von der 1. Einnahme)

$\Rightarrow$ insgesamt $20,689 \ ^{mg}/_{l}$
$\Rightarrow$ Die Vorgabe wird nicht eingehalten.

d) Es muss gelten:

$g(0) = 0$
$g(4) = 10$
$g'(4) = 0$ (Maximum)

$g(x) = a \cdot x \cdot e^{-bx}$
$g'(x) = a \cdot e^{-bx} + ax \cdot (-b) \cdot e^{-bx}$
$= (-abx + a) \cdot e^{-bx}$

$g'(4)=0 \Rightarrow (-4ab+a)\cdot e^{-4b}=0$

$-4ab+a=0$ oder $e^{-4b}=0$

$a\cdot(-4b+1)=0$ $\quad$ ↯

$a=0$ oder $-4b+1=0$

↯ $\quad -4b=-1$

$b=0{,}25$

$\Rightarrow g(x)=ax\cdot e^{-0{,}25x}$

$g(4)=10 \Rightarrow 4a\cdot e^{-0{,}25\cdot 4}=10$

$4a\cdot e^{-1}=10$

$\frac{4a}{e}=10$

$4a=10e$

$a=\frac{10}{4}e$

$a=2{,}25e$

$\Rightarrow g(x)=(2{,}25e)\cdot x\cdot e^{-0{,}25x}$

3a) $w(1)=4\cdot(e^{-1}-e^{-2})\approx 0{,}93\ m/a$

w stellt die Wachstumsrate dar, da $w(t)>0$ für alle t, ist die Wachstumsrate selbst auch positiv

$\Rightarrow$ Die Höhe der Palme wächst ständig weiter

Die Wendestelle ist die Stelle (bzw. der Zeitpunkt), an dem die Wachstumsrate am stärksten abnimmt

$w'(t) = 4 \cdot (-e^{-t} - (-2) \cdot e^{-2t})$
$= 4 \cdot (-e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t})$
$= -4 \cdot (e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t})$
$w''(t) = -4 \cdot (-e^{-t} - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2t})$
$= -4 \cdot (-e^{-t} + 4 \cdot e^{-2t})$
$= 4 \cdot (e^{-t} - 4 \cdot e^{-2t})$

N.B.: $w'(t) = 0$
$-4 \cdot (e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t}) = 0$
$e^{-t} - 2 \cdot e^{-2t} = 0$
$e^{-t} = 2 \cdot e^{-2t} \quad | : e^{-t} \qquad e^{-t} \neq 0$
$1 = 2 \cdot e^{-t}$
$0{,}5 = e^{-t} \quad | \ln$
$\ln(0{,}5) = -t$
$-\ln(0{,}5) = t$

Ränder:
$w(0) = 0$
$\lim\limits_{t \to \infty} w(t) = 0$
$w(-\ln(0{,}5)) = 1$

H.B.: $w'(t) = 0 \land w''(t) \neq 0$
$w''(-\ln(0{,}5)) = 4 \cdot (e^{\ln 0{,}5} - 4 \cdot e^{2 \ln(0{,}5)})$
$= 4 \cdot (0{,}5 - 4 \cdot 0{,}25)$
$= 4 \cdot (-0{,}5)$
$= -2$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Zeitpunkt liegt nach $-\ln(0{,}5) \approx 0{,}69$ Jahren.

b) gesucht: Funktion h für die Höhe

h muss eine Stammfunktion von w sein

$$h(t) = 4 \cdot (-1 \cdot e^{-t} - (-0{,}5) \cdot e^{-2t}) + c$$
$$= 4 \cdot (-e^{-t} + 0{,}5 \cdot e^{-2t}) + c$$
$$= -4e^{-t} + 2e^{-2t} + c$$

Es gilt: $h(0) = 1$ m

$$\Rightarrow -4 \cdot e^{0} + 2 \cdot e^{0} + c = 1$$
$$-4 + 2 + c = 1$$
$$c = 3$$

$$\Rightarrow h(t) = 4 \cdot (-e^{-t} + 0{,}5 \cdot e^{-2t}) + 3$$
$$= -4e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t} + 3$$

$h(2) = 2{,}495 \approx 2{,}5$ m
$h(1) = 1{,}799 \approx 1{,}8$ m

$\Rightarrow$ Höhenzunahme im 2. Jahr: $2{,}5 - 1{,}8$ m $= 0{,}7$ m

$$h(t) = 1{,}5$$
$$-4e^{-t} + 2 \cdot e^{-2t} + 3 = 1{,}5$$

(GTR)

$$t_1 = -0{,}4 \quad (t \geq 0 \ ⚡)$$
$$t_2 = 0{,}69$$

Die gewünschte Höhe wird nach 0,69 Jahren erreicht.

$$\lim_{x \to \infty} -4 \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{-0{,}2t} + 3 = 3$$

Die maximale Höhe sind 3 m.

$h(t)$: Höhe zum Zeitpunkt t
$h(t+0{,}5)$: Höhe 6 Monate nach dem Zeitpunkt t

$$\frac{h(t+0{,}5)}{h(t)} = 1{,}5$$

↑
Die Palme vergrößert ihre Höhe innerhalb von 6 Monaten auf das 1,5-Fache.

Frage: Suche einen Zeitpunkt, von dem aus innerhalb der nächsten 6 Monate mit einer Zunahme der Höhe um 50% zu rechnen ist.

4a) $f(3) = 20 \cdot e^{0,3} \approx 20{,}61 \text{ mm}^2$

Fläche zu Beginn: $f(0) = 20 \cdot e^0 = 20$

$$60 = 20 \cdot e^{0,1t} \quad | :20$$
$$3 = e^{0,1t} \quad | \ln$$
$$\ln(3) = 0{,}1t$$
$$10 \cdot \ln(3) = t$$
$$10{,}99 \approx 10{,}986 = t$$

Die Verdreifachung erfolgt nach 10,99 h.

Änderungsrate: $f'(t)$
$f'(t) = 2 \cdot e^{0,1t}$
$f'(2) = 2 \cdot e^{0,2} \approx 2{,}44 \text{ mm}^2/\text{h}$

b) $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)\,dt = \frac{1}{4} \cdot \int_5^9 20 \cdot e^{0,1t}\,dt$

$= \frac{1}{4} \cdot \left[200 \cdot e^{0,1t}\right]_5^9$

$\approx \frac{162,17}{4} = 40,54$

Zwischen $t = 5\,h$ und $t = 9\,h$ beträgt die durchschnittliche Fläche $40,54\,mm^2$

Erinnerung: Mittelwert einer Funktion f im Intervall $[a, b]$:

$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$

c) $g'(t) = 20 \cdot (0,1 - 0,01\,t) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$
$= (2 - 0,2t) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$

$g''(t) = -0,2 \cdot e^{0,1t - 0,005t^2} + (2 - 0,2t) \cdot (0,1 - 0,01t) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$
$= -0,2 \cdot e^{0,1t - 0,005t^2} + (0,2 - 0,02t - 0,002t + 0,002t^2) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$
$= -0,2\, e^{0,1t - 0,005t^2} + (0,2 - 0,022t + 0,002t^2) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$
$= (-0,022t + 0,002t^2) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2}$

N.B.: $g'(t) = 0$
$(2 - 0,2t) \cdot e^{0,1t - 0,005t^2} = 0 \quad | : e^{0,1t - 0,005t^2} \ (\neq 0)$
$2 - 0,2t = 0$
$-0,2t = -2$
$t = 10$

H.B.: $g'(t) = 0 \wedge g''(t) \neq 0$

$g''(10) = -0{,}0329\ldots < 0$

$\Rightarrow$ HP bei $t = 10$

(Ränder: in Aufgabenstellung nicht erkennbar)

$20 = 20 \cdot e^{0{,}1t - 0{,}005t^2} \quad | :20$

$1 = e^{0{,}1t - 0{,}005t^2} \quad | \ln$

$0 = 0{,}1t - 0{,}005t^2$

$0 = 20t - t^2$

$0 = t(20 - t)$

$\Rightarrow t_1 = 0$ (Beginn)

$t_2 = 20$

$\Rightarrow$ Nach 20 h ist der urspr. Wert wieder erreicht

d) $h(-t) = h(t) \Rightarrow h$ symmetrisch zur y-Achse

$h(t) = g(t+10) \Rightarrow$ Wenn man g um 10 Einheiten nach links verschiebt, erhält man h

$\Rightarrow$ g symmetrisch zur Geraden $x = 10$