LÖSUNGEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1a) $f'(x) = 6e^{2x}$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + 2(x+2) \cdot e^{2x}$

$= e^{2x} + (2x+4) \cdot e^{2x}$

$= (2x+5) \cdot e^{2x}$

c) $f'(x) = 3 \cdot e^{-3x} + (-3) \cdot (3x+4) \cdot e^{-3x}$

$= 3 \cdot e^{-3x} + (-9x-12) \cdot e^{-3x}$

$= (-9x-9) \cdot e^{-3x}$

d) $f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + (-2) \cdot (x^2+2) \cdot e^{-2x}$

$= 2x\, e^{-2x} + (-2x^2-4) \cdot e^{-2x}$

$= (-2x^2+2x-4) \cdot e^{-2x}$

e) $f'(x) = (-2x+1) \cdot e^{0,5x} + 0,5 \cdot (-x^2+x+1) \cdot e^{0,5x}$

$= (-2x+1) \cdot e^{0,5x} + (-0,5x^2+0,5x+0,5) \cdot e^{0,5x}$

$= (-0,5x^2-1,5x+0,5) \cdot e^{0,5x}$

f) $f'(x) = 1 \cdot e^{3x-4} + 3x e^{3x-4}$

$= (3x+1) \cdot e^{3x-4}$

g) $f'(x) = 2e^{2x} \cdot \sin(x) + e^{2x} \cdot \cos(x)$

$= (2\sin x + \cos x) \cdot e^{2x}$

h) $f(x) = x^{0,5} \cdot \sin(x^2)$

$f'(x) = 0,5\, x^{-0,5} \cdot \sin(x^2) + x^{0,5} \cdot 2x \cdot \cos(x^2)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin(x^2) + 2x^{1,5} \cos(x^2)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x^2) + 2x^{\frac{3}{2}} \cos(x^2)$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x^2) + 2 \cdot (\sqrt{x})^3 \cdot \cos(x^2)$

i) $f'(x) = 2 \cdot (e^{2x}-1) \cdot 2 \cdot e^{2x} = 4(e^{4x}-e^{2x})$

2) a) $f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$

$f''(x) = 25 \cdot e^{5x}$

$f'''(x) = 125 \cdot e^{5x}$

$f^{(n)}(x) = 5^n \cdot e^{5x}$

b) $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$

$f''(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = (x+2) \cdot e^x$

$f'''(x) = 1 \cdot e^x + (x+2) \cdot e^x = (x+3) \cdot e^x$

$f^{(n)}(x) = (x+n) \cdot e^x$

c) $f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

$f''(x) = (2x+2) \cdot e^x + (x^2+2x) \cdot e^x$

$= (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$f'''(x) = (2x+4) \cdot e^x + (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

$= (x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$

$f^{(n)}(x) = (x^2 + 2n \cdot x + n \cdot (n-1)) \cdot e^x$

3 a) $f'(x) = 10 \cdot e^{-0{,}5x} + (10x) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= 10 \cdot e^{-0{,}5x} + (-5x) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= (-5x + 10) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = -5 \cdot e^{-0{,}5x} + (-5x+10) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= -5 \cdot e^{-0{,}5x} + (2{,}5x - 5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= (2{,}5x - 10) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} + (2{,}5x - 10) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} + (-1{,}25x + 5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= (-1{,}25x + 7{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

b) $f(x)=0 \Leftrightarrow 10x \cdot e^{-0,5x} = 0 \quad | : e^{-0,5x}$

$10x = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow N(0/0)$

c) N.B.: $f'(x)=0$

$(-5x+10) \cdot e^{-0,5x} = 0$

$-5x+10=0$ oder $e^{-0,5x} = 0$ ↯

$5x = 10$

$x = 2$

H.B.: $f'(x)=0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2) = (2,5 \cdot 2 - 10) \cdot e^{-0,5 \cdot 2}$

$= -5 \cdot e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ lok. Max. bei $x=2$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Extremstelle liegt bei $x=2$

d) N.B.: $f''(x)=0$

$(2,5x-10) \cdot e^{-0,5x} = 0$

$2,5x-10=0$ oder $e^{-0,5x}=0$ ↯

$2,5x = 10$

$x = 4$

H.B.: $f''(x)=0$ und $f'''(x) \neq 0$

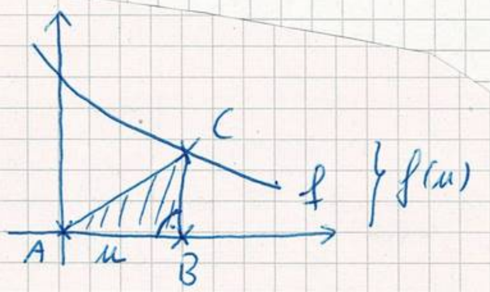
$f'''(4) = (-1,25 \cdot 4 + 7,5) \cdot e^{-0,5 \cdot 4}$

$= 2,5 \cdot e^{-2} > 0$

$\Rightarrow$ WS bei $x=4$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Wendestelle liegt bei $x=4$

e)



$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$$

$\uparrow$ Länge der Strecke $\overline{AB}$

$\uparrow$ Länge der Strecke $\overline{BC}$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u \cdot e^{-0{,}5u}$$
$$= 5u^2 \cdot e^{-0{,}5u}$$

4a)

$$e^x \cdot (2x + x^2) = 0 \quad | : e^x \qquad e^x \neq 0$$
$$2x + x^2 = 0$$
$$x(2+x) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = -2$$

b) $F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$
$= (x^2 + 2x) \cdot e^x$
$= f(x)$

$G(x) = x^2 \cdot e^x + c$

$G(1) = 2e \Rightarrow e + c = 2e \quad | -e$

$c = e$

$\Rightarrow G(x) = x^2 \cdot e^x + e$

5 a) $f(x) = 0$

$$2e^{0,5x} - 1 = 0$$

$$2e^{0,5x} = 1$$

$$e^{0,5x} = 0,5 \quad | \ln$$

$$0,5x = \ln(0,5) \quad | \cdot 2$$

$$x = 2 \cdot \ln(0,5)$$

b) Bestimmung der Tangente:

$$t(x) = mx + b$$

$$m = f'(0)$$

$$f'(x) = e^{0,5x}$$

$$f'(0) = e^{0} = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = x + b$$

$S(0|1)$ auf t $\Rightarrow t(0) = 1$

$$0 + b = 1$$

$$b = 1$$

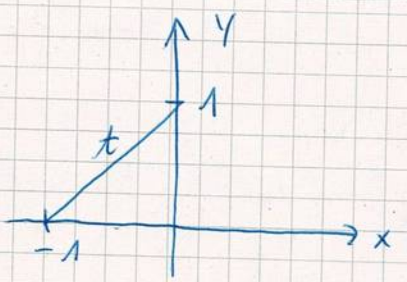
$$\Rightarrow t(x) = x + 1$$

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Achsen:

y-Achse: $t(0) = 1$

x-Achse: $x + 1 = 0$

$$x = -1$$



Das Dreieck ist gleichschenklig, da die beiden auf den Achsen verlaufenden Seiten jeweils 1LE lang sind.

6 a) $f_a(-1) = a \cdot e^{a-1}$

$f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$

$f_a'(x) = a \cdot e^{a+x}$

$f_a'(-1) = a \cdot e^{a-1}$

$\Rightarrow t_a(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + b$

$P(-1 / a e^{a-1})$ auf $t_a \Rightarrow t_a(-1) = a e^{a-1}$

$a \cdot e^{a-1} \cdot (-1) + b = a e^{a-1}$

$b = 2 a e^{a-1}$

$\Rightarrow t_a(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 a e^{a-1}$

b) Schnittp. von t_a mit den Achsen:

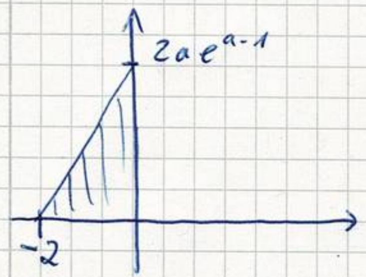
$t_a(0) = 2 a e^{a-1}$

$t_a(x) = 0 \Rightarrow a e^{a-1} \cdot x + 2 a e^{a-1} = 0$

$a e^{a-1} \cdot x = -2 a e^{a-1}$

$x = -2$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{2 \cdot 2ae^{a-1}}{2} = 2ae^{a-1}$$



7a) N.B.: $f'(x)=0$ für $x=0$ nicht erfüllt
(Der Graph ist derjenige von f', nicht derjenige von f)
$\Rightarrow$ falsch

b) waagrechte Tangente $\Leftrightarrow f'(x)=0$
Es gilt: $f'(-2)=0$
$\Rightarrow$ wahr

c) Wendepunkte von f sind Extremstellen von f'.
Im Bild zu sehen: Hochpunkt von f' bei $x=0$
$\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x=0$
$\Rightarrow$ falsch

d) Aussage nicht entscheidbar
f' ist positiv für $x>-2$, f wächst also streng monoton. Aber $f(-2)>0$ oder $f(-2)\leq 0$ unbekannt

8a) f wächst zwar monoton, aber es nähert sich für $x \to \infty$ immer mehr dem Grenzwert 0 an.

f' müsste positiv sein, sich aber für $x \to \infty$ selbst 0 annähern, da f immer weniger wächst

Es gilt aber $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 2$ ↯

$\Rightarrow f'(x) \neq g(x)$

$\Rightarrow g'(x) = f(x)$

b) $A(0|3)$ auf $g \Rightarrow g(0) = 3$

$$e^{a \cdot 0} + b = 3$$
$$e^{0} + b = 3$$
$$1 + b = 3$$
$$b = 2$$

$\Rightarrow g(x) = e^{ax} + 2$

$B(1{,}5|2{,}5)$ auf $g \Rightarrow g(1{,}5) = 2{,}5$

$$e^{1{,}5a} + 2 = 2{,}5$$
$$e^{1{,}5a} = 0{,}5 \quad | \ln$$
$$1{,}5a = \ln(0{,}5)$$
$$a = \frac{\ln(0{,}5)}{1{,}5}$$

$\Rightarrow g(x) = e^{\frac{\ln(0{,}5)}{1{,}5}x} + 2$

9) $(2x^2-50)\cdot(e^{2x}-7)=0$

$2x^2-50=0$ oder $e^{2x}=7 \quad | \ln$

$2x^2=50$ $\qquad$ $2x=\ln(7)$

$x^2=25$ $\qquad$ $x_3=\frac{\ln(7)}{2}$

$x_1=5$

$x_2=-5$

10a) $x=4$, da $2^4=16$

b) $x=1$, da $3^1=3$

c) $x=11$, da $11^2=121$

d) $x=3$, da $a^3=a^3$

e) $x=1$, da $7^0=1$

f) $x=144$, da $144^{0,5}=\sqrt{144}=12$

g) $x=7$

h) $x=4$, da $(\sqrt{a})^4=a^{\frac{4}{2}}=a^2$

11a) $\log_2(x+7)=4 \quad | 2^{()}$

$x+7=2^4$

$x+7=16$

$x=9$

b) $\log_2(2x+4)-3=2 \quad |+3$

$\log_2(2x+4)=5 \quad | 2^{()}$

$2x+4=2^5$

$2x+4=32$

$2x=28$

$x=14$

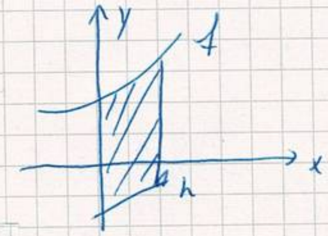
12a) $e^x + 0{,}5x = 0{,}5x - 1 \quad | -0{,}5x$

$e^x = -1$

$\lightning$

$(e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R})$

b)



Abstand zwischen f und h:

$f(x) - h(x)$

$$\int_0^1 f(x) - h(x)\,dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + 0{,}5x - (0{,}5x - c)\,dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + 0{,}5x - 0{,}5x + c\,dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + c\,dx = 3$$

$$\left[e^x + cx\right]_0^1 = 3$$

$$e^1 + c - (e^0 + c \cdot 0) = 3$$

$$e + c - 1 = 3$$

$$\underline{c = -e + 4}$$

13) f berührt x-Achse in Punkt P $\Leftrightarrow$ ① $f(x_1)=0$
$P(x_1|0)$

② P Hochpunkt oder Tiefpunkt von P (kein Schnittpunkt)

$$g(x_1)=e^{f(x_1)}-1=e^0-1=1-1=0$$

N.B. für g: $g'(x)=0$

$$g'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$$

$$g'(x_1)=\underbrace{f'(x_1)}_{0}\cdot e^{f'(x_1)}=0$$

$$f'(x)\cdot\underbrace{e^{f'(x)}}_{>0}$$

$\downarrow$

$\underbrace{\text{Vorzeichenwechsel von } f' \text{ bei } x_1}_{\text{auch bei } g' \text{ VZW}}$

$\Rightarrow$ g berührt x-Achse in P

14) $e^{4x}-5=4e^{2x}$

$e^{4x}-4e^{2x}-5=0 \quad | \; e^{2x}=z$

$z^2-4z-5=0$

$z=2\pm\sqrt{4+5}$

$z=2\pm3$

$z_1=-1$ und $z_2=5 \quad | \; z=e^{2x}$

$e^{2x}=-1$ $\quad$ $e^{2x}=5 \quad | \ln$

$\lightning$ $\quad$ $2x=\ln(5)$

$x=\frac{\ln(5)}{2}$