AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Bestimme die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = (x+2) \cdot e^{2x}$

c) $f(x) = (3x+4) \cdot e^{-3x}$

d) $f(x) = (x^2+2) \cdot e^{-2x}$

e) $f(x) = (-x^2+x+1) \cdot e^{0,5x}$

f) $f(x) = x \cdot e^{3x-4}$

g) $f(x) = e^{2x} \cdot \sin(x)$

h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin(x^2)$

i) $f(x) = (e^{2x}-1)^2$

2) Bestimme jeweils die erste, zweite und n-te Ableitung:

a) $f(x) = e^{5x}$

b) $f(x) = x \cdot e^{x}$

c) $f(x) = x^2 \cdot e^{x}$

3) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0{,}5x}$

a) Bestimme die erste, zweite und dritte Ableitung.

b) Bestimme die Nullstelle von f

c) Bestimme die Extremstelle von f
(Auf die y-Koordinate wird verzichtet)

d) Bestimme die Wendestelle von f
(Auf die y-Koordinate wird verzichtet)

e) Für jedes $u > 0$ sind $A(0/0)$, $B(u/0)$, und $C(u/f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Gib den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von u an.

4) [Aufgabensammlung Hamburg Nr. 23]

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (2 \cdot x + x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) **Bestimmen** Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) **Zeigen** Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = x^2 \cdot e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ eine Stammfunktion von f ist.
Geben Sie eine Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f **an**, für die $G(1) = 2e$ gilt.

5) [Aufgabensammlung Hamburg Nr. 29]

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

a) **Ermitteln** Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie **nach**, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

6) [Aufgabensammlung Hamburg Nr. 35]

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1|f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.

a) **Weisen** Sie **nach**, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann.

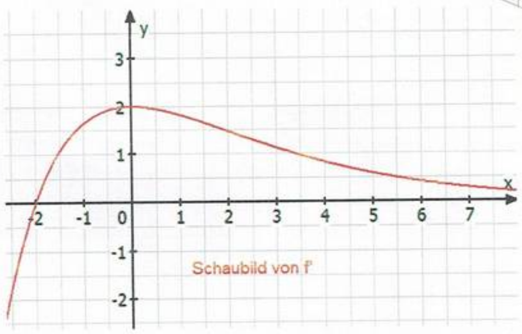
b) Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a.

7) [Abitur Baden-Württemberg]

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitung f ′ einer Funktion f.

Begründen Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

a) Bei x = 0 besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt.
b) Bei x = -2 besitzt das Schaubild von f eine waagrechte Tangente.
c) Das Schaubild der Funktion f besitzt keine Wendepunkte.
d) f(x) > 0 für x > -2.



8) [Abitur Baden-Württemberg]

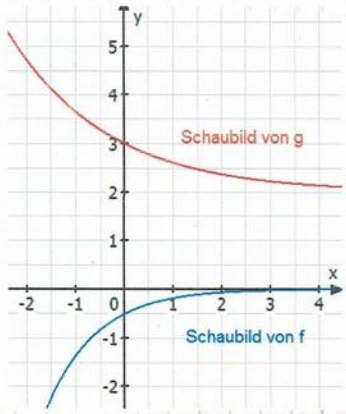
Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g. Eine der beiden Funktionen ist die Ableitungsfunktion der anderen Funktion.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f die Ableitung der Funktion g ist.

b) Die Funktion g hat die Funktionsgleichung

$g(x) = e^{ax} + b$.

Bestimmen Sie a und b.



9) Löse die Gleichung:

$$(2x^2-50)\cdot(e^{2x}-7)=0$$

10) Bestimme x:

a) $\log_2(16)=x$

b) $\log_3(3)=x$

c) $\log_x(121)=2$

d) $\log_a(a^3)=x$

e) $\log_7(x)=0$

f) $\log_x(12)=0{,}5$

g) $3^{\log_3(7)}=x$

h) $\log_{a^2}(\sqrt{a})=x$

11) Löse die Gleichungen:

a) $\log_2(x+7)=4$

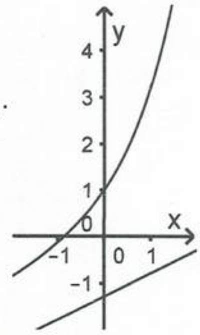
b) $\log_2(2x+4)-3=2$

12) [Aufgabenfundus Hamburg]

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in IR definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

b) Für eine positive reelle Zahl c wird die in IR definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c.
Die beiden Graphen schließen mit der y-Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c.



13) [Aufgabenfundus Hamburg]

Zeigen Sie: Wenn der Graph einer differenzierbaren Funktion f die x-Achse in einem Punkt P berührt, dann gilt dies auch für den Graphen der Funktion g mit $g(x) = e^{f(x)} - 1$.

14) [Abitur Baden-Württemberg]

Löse die Gleichung:

$$e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$$

AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Die momentane Ankunftsrate an einem Kino, also die Zahl der ankommenden Personen pro Minute, wird beschrieben durch die Funktion
$f(x) = 0{,}27x^2 e^{-0{,}12x}$.
Dabei ist x die Zeit in Minuten seit 19 Uhr und $f(x)$ die Anzahl der ankommenden Personen pro Minute.
Vor 19 Uhr befinden sich noch keine Personen am Kino.

a) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem am meisten Besucher pro Minute kommen.

b) Bestimme den Zeitraum, in dem weniger als 3 Personen pro Minute zum Kino kommen.

c) Die Funktion $g(x) = 312{,}5 - (2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}$ beschreibt die Anzahl der bis zum Zeitpunkt x insgesamt angekommenen Personen (was bis zur Öffnung des Kartenschalters der Zahl der Personen entspricht, die vor dem Kino warten)

(I) Zeige, dass g eine Stammfunktion von f ist
(II) Bestimme rechnerisch, wie viele Personen insgesamt höchstens zum Kino kommen

d) Um 19:20 Uhr öffnet der Kartenschalter des Kinos. Pro Minute können an 6 Personen Karten ausgegeben werden.

(I) Bestimme rechnerisch, mit welcher Wartezeit eine Person rechnen muss, die um 19:20 Uhr zum Kino kommt.

(II) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Zahl der Wartenden am größten ist.

(III) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem sich die Warteschlange auflöst.

e) Durch eine Verzögerung öffnet der Kartenschalter erst um 19:50 Uhr. Bestimme rechnerisch, wie viele Personen jetzt pro Minute am Schalter bedient werden müssen, damit die Schlange um 20:30 Uhr abgebaut ist.

[VORBILD: Abitur Baden-Württemberg 2007]

2) Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden ab der Einnahme und $f(t)$ in mg/ℓ gemessen. Es gilt: $0 \leq x \leq 12$.

a) Bestimme rechnerisch, wann die Konzentration den höchsten Wert erreicht.

b) Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4\ \mathrm{mg}/\ell$ beträgt. Bestimme die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

c) Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut addiert.

Die Konzentration des Medikaments im Blut darf 20 mg/l nicht übersteigen. Bestimme rechnerisch, ob diese Vorgabe eingehalten wird.

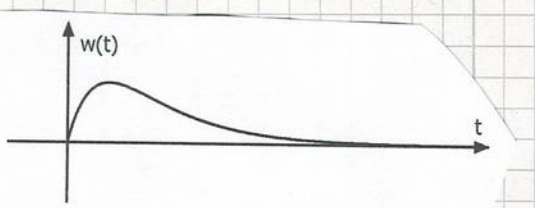
d) Das Medikament wird in seiner Zusammensetzung verändert. Die Konzentration im Blut wird durch $g(t) = a\,t\,e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in mg/l gemessen. Bestimme a und b so, dass die Konzentration 4 Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert 10 mg/l erreicht.

[Vorbild: Abitur Baden-Württemberg 2006]

3) [Abitur Baden-Württemberg 2020]

Betrachtet wird das Wachstum einer Palme. Ihre Höhe beträgt zu Beobachtungsbeginn einen Meter, die momentane Wachstumsrate ihrer Höhe wird durch die Funktion w mit

$w(t) = 4 \cdot \left(e^{-t} - e^{-2t}\right);\ t \geq 0$



(t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, w(t) in Meter pro Jahr) beschrieben.
Die Abbildung zeigt den Graphen von w.

a) Geben Sie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt t = 1 an.
Begründen Sie anhand des Graphen, dass die Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt.
Die Funktion w besitzt im abgebildeten Bereich eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate.

b) Berechnen Sie die Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn.
Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm der Funktion h, der die Höhe der Palme zum Zeitpunkt t angibt.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von 1,50 m hat.
Untersuchen Sie, welche Höhe die Palme maximal erreichen kann.

Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{h(t+0,5)}{h(t)} = 1,5$ führt.

4) [Abitur Baden-Württemberg 2019]

In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

Versuchsreihe 1

Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit

$f(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, f(t) in mm²).

a) Bestimmen Sie den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.
Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

b) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \cdot \int_5^9 f(t)dt$

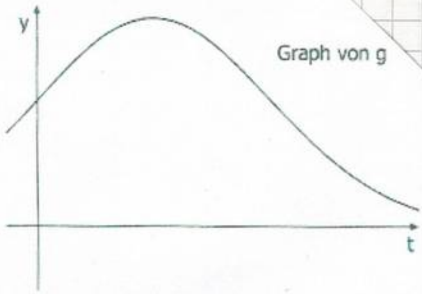
Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Versuchsreihe 2

Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit

$g(t) = 20 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,005 \cdot t^2}$ (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, g(t) in mm²)

Die Abbildung zeigt den Graphen von g.



c) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an.
Berechnen Sie diesen Wert.
Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

d) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(t) = g(t + 10)$.
Für jede reelle Zahl t gilt: $h(-t) = h(t)$.
Erläutern Sie, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

5) [Abitur Baden-Württemberg 2018]

Ein Klimaforscher beschreibt die Entwicklung der globalen Durchschnittstemperatur modellhaft durch die Funktion f mit

$$f(t) = 2{,}8e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1 \;;\; 0 \le t \le 200$$

Dabei gibt t die Zeit in Jahren seit Beginn des Jahres 1900 und f(t) die globale Durchschnittstemperatur in Grad Celsius an.
Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben anhand dieses Modells.

a) Geben Sie die globale Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 1900 an.
Geben die niedrigste globale Durchschnittstemperatur seit 1900 an.
In welchem Jahr wird die globale Durchschnittstemperatur 16,0°C überschreiten?
Ermitteln Sie die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur zu Beginn des Jahres 2000.
Bestimmen Sie den Mittelwert der globalen Durchschnittstemperatur im durch die Modellierung beschriebenen Zeitraum.

b) Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+10) - f(t) = 0{,}5$ führt.

Nachdem die globale Durchschnittstemperatur ihren niedrigsten Wert erreicht hat, steigt sie immer weiter an.
Zeigen Sie, dass dieser Anstieg immer schneller verläuft.

c) Es werden Klimaschutzmaßnahmen geplant. Greifen diese zum Zeitpunkt t_0, so bleibt die momentane Änderungsrate der globalen Durchschnittstemperatur konstant bei dem Wert, der durch das Modell des Klimaforschers für t_0 vorausgesagt wird.
Bestimmen Sie den späteren Zeitpunkt t_0, zu dem die Maßnahmen greifen müssen, damit die globale Durchschnittstemperatur 15,7°C bis zum Beginn des Jahres 2050 nicht überschreiten wird.

d) Infolge alternativer Klimaschutzmaßnahmen kann der Verlauf der globalen Durchschnittstemperatur ab Beginn des Jahres 2020 durch beschränktes Wachstum modelliert werden. Der Graph der zugehörigen Funktion g schließt sich dabei ohne Knick an den Graphen der Funktion f an. Außerdem stellt sich nach diesem neuen Modell langfristig eine globale Durchschnittstemperatur von 16,8°C ein.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm von g.

6) [Abitur Bremen 2010]

Ausbreitung eines Internetvirus

Der *Code Red Worm* ist ein Internetvirus. Das Virus richtet nur auf zentralen Computern (Servern) einen Schaden an. Von einem Virus befallene Server sind nicht mehr einsatzfähig.
Der *Code Red Worm* hat am 13.07.2001 innerhalb einiger Stunden von insgesamt 280000 Servern viele befallen. Die Anzahl der befallenen Server wird vom CERT * über ein Meldesystem ausgezählt. Mit Hilfe der Daten werden mathematische Modelle entwickelt, um Vorhersagen über die Ausbreitung von ähnlichen Viren zu machen. Anhand des Internetvirus *Code Red Worm* sollen Sie mathematische Modelle überprüfen.

Die Tabelle gibt die Anzahl der am 13.07.2001 befallenen Server zu einer bestimmten Zeit an, die in Stunden ab 10 Uhr gemessen wird,

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden	0	2	4	6	8
Anzahl der infizierten Server	20000	100000	205000	250000	277500

a) Eine Modellierung der Ausbreitung des Virus wird mit Hilfe der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 280000 - 260000 \cdot e^{-0{,}5805 \cdot t},\ t \geq 0$$

beschrieben. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $f(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für $0 \leq t \leq 8$ mit Hilfe von fünf Punkten für $t = 0; 2; 4; 6; 8$ in ein Koordinatensystem. Runden Sie auf ganze Zahlen. Tragen Sie die in der Tabelle angegebenen fünf Punkte zum Vergleich ein.

Bestimmen Sie den Funktionswert, der die stärkste prozentuale Abweichung in Bezug auf die Messwerte aufweist. Berechnen und bewerten Sie diese Abweichung.

Geben Sie den Ableitungsterm $f'(t)$ an und begründen Sie, dass die Funktion f streng monoton wächst.

Ein weiterer Ansatz verwendet zur Modellierung die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20000 + 260000 \cdot e^{-0{,}9509 \cdot t}},\ t \geq 0.$$

t ist wiederum die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $g(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

b) Bestimmen Sie den Anfangswert und $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$ mit Begründung.

Erläutern Sie die Bedeutung des Werts $\lim\limits_{t \to \infty} g(t)$ für den Sachzusammenhang.

Skizzieren Sie den Graphen von g für $0 \leq t \leq 8$ mit den bisherigen Ergebnissen und den vier hier angegebenen Wertepaaren in das Koordinatensystem aus Teil a).

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden, t	2	4	6	8
Anzahl der infizierten Server, $g(t)$	95209	217092	268389	278203

c) Bestimmen Sie g' unter Angabe des Rechenwegs. (Zur Kontrolle: $g'(t)=\frac{1{,}38451\cdot 10^{15}\cdot e^{-0{,}9509\cdot t}}{(20000+260000\cdot e^{-0{,}9509\cdot t})^2}$)

Geben Sie $g'(0)$ und $\lim_{t\to\infty} g'(t)$ an. Erläutern Sie die Bedeutung der Werte im Sachzusammenhang.

Berechnen Sie, wie viele Server zum Zeitpunkt $t_W = 2{,}6974$, der Wendestelle von g, infiziert sind und erläutern Sie die Bedeutung des zugehörigen Punktes für den Verlauf des Graphen von g. Runden Sie auf eine ganze Zahl.

Beschreiben Sie ein Verfahren, die Wendestelle von g zu bestimmen.

(...)

e) Eine Funktion h mit der Funktionsgleichung

$$h(t)=\frac{a\cdot S}{a+(S-a)\cdot e^{-S\cdot k\cdot t}},\ t\geq 0 \text{ und } 0<a<S,\ k>0$$

beschreibt wie die Funktion g einen so genannten logistischen Wachstumsprozess. Dabei sind $a=h(0)$ der Anfangswert und $S=\lim_{t\to\infty} h(t)$ die Sättigungsgrenze.

Ermitteln Sie eine Funktion vom Typ h mit $a=20000$ und $S=280000$.

Berechnen Sie k unter der Annahme, dass $h(4)=205000$ gilt und geben Sie k in wissenschaftlicher Schreibweise mit dem Faktor 10^{-6} und drei Nachkommastellen an.

7) [Abitur Sachsen 2000]

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a durch

$y = f_a(x) = xe^{-ax}$, $x\in\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$, $a>0$. G_a sei der zu f_a gehörige Graph.

5.1 Berechnen Sie die Koordiaten der Extrem- und Wendepunkte von G_a. Skizzieren Sie die Graphen $G_{0,5}$ und $G_{0,25}$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

5.2 Zeigen Sie, dass der Anstieg von f_a an der Stelle 0 von a unabhängig ist.

5.3 Beweisen Sie, dass F_a mit $F_a(x)=\frac{-1}{a}e^{-ax}\left(x+\frac{1}{a}\right)$ eine Stammfunktion von f_a ist.
Der Graph G_a, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = z$, $z > 0$, schließen eine Fläche mit dem Inhalt $A(z)$ ein. Berechnen Sie $\lim_{z\to\infty} A(z)$.