Lösungen

Teil I

1) Sie sind linear abhängig. Es gilt nämlich $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

2) $r_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r_3\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow r_3 = 0$

$\Rightarrow r_2 + 3\cdot 0 = 0$

$r_2 = 0$

$\Rightarrow r_1 + 2\cdot 0 = 0$

$r_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

3a) $2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Denn: $r_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r_3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow r_3 = 0$

$\Rightarrow r_2 = 0$

$\Rightarrow r_1 + 0 = 0$

$r_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

4) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-2\\4-3\\1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Ergebnis: $\vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$

5a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-1\\2-3\\1-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

b) $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = 2 + 2 + 3 = 7$

c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{b} = \begin{pmatrix}5\\-1\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3+3\\-6-15\\5+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-21\\7\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{array}$$

6) $$\left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-x \\ 2x-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{array}{cc} x & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ x & 1 \\ 1 & 2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2-x \\ 2x-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 10$$

$$\begin{aligned} -6 + 2 - x + 4x - 2 &= 10 \\ -6 + 3x &= 10 \\ 3x &= 16 \\ x &= \underline{\underline{\tfrac{16}{3}}} \end{aligned}$$

7a) $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-(-1) \\ 5-1 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} \text{ LE}$$

$$\overrightarrow{AC_t} = \begin{pmatrix} -2+t-(-1) \\ 3-1 \\ 5+t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 2 \\ 1+t \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AC_t}| = \sqrt{(-1+t)^2+4+(1+t)^2} = \sqrt{t^2-2t+1+4+t^2+2t+1} = \sqrt{2t^2+6}$$

$$\overrightarrow{BC_t} = \begin{pmatrix} -2+t-(-3) \\ 3-5 \\ 5+t-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ -1+t \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BC_t}| = \sqrt{(1+t)^2+4+(-1+t)^2} = \sqrt{2t^2+6}$$

$\Rightarrow |\overrightarrow{BC_t}| = |\overrightarrow{AC_t}|$

$\Rightarrow$ Jedes Dreieck ist gleichschenklig

b) $\sqrt{2t^2+6} = \sqrt{24} \quad | \, ()^2$

$$2t^2 + 6 = 24 \quad | -6$$
$$2t^2 = 18 \quad | :2$$
$$t^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$$
$$t_1 = 3$$
$$t_2 = -3$$

8a) $F(0|8|4)$ (Der Punkt liegt direkt über C ⇒ x- und y-Koordinate gleich; z-Koordinate wie D.)

$$|\overrightarrow{BF}| = \left|\begin{pmatrix} 0-8 \\ 8-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+64+16}$$
$$= \sqrt{144}$$
$$= 12 \text{ LE}$$

b) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M(0|0|2)$
$P(4|4|0)$
$K(0|y|4)$

rechter Winkel in M

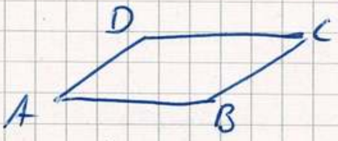
$\Rightarrow \overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$
$$4y - 4 = 0$$
$$\underline{\underline{y = 1}}$$

$\Rightarrow K(0/1/4)$

Der Punkt liegt auf der Kante $\overline{DF}$, da $K(0/y/4)$ für $0 \leq y \leq 8$ auf der Kante liegt.

9a)



$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 16 - 16 = 0$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel

$\Rightarrow$ Rechteck

b) $|\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = h$ (da sie senkrecht auf G steht)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{18} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot \sqrt{36} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 \\ &= 2 \cdot 24 \\ &= \underline{48 \text{ VE}} \end{aligned}$$

TEIL II

1) $r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\2 & 3 & -2 & 0\\3 & 7 & 2 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2\cdot I - II\\3\cdot I - III\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & -1 & -2 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\II + III\\\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Es gibt nicht nur die triviale Lösung $r_1 = r_2 = r_3 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig

2a) $\vec{c} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\9\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\13\\14\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}8\\13\\14\end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8-3\\2-4\\3-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc}1 & 2\\2 & 3\\1 & 4\\1 & 2\\2 & 3\end{array}$$

$r_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\2 & 3 & -2 & 0\\1 & 4 & -1 & 0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2\cdot I - II\\I - III\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{array}\right) 2 \cdot \underline{II} + \underline{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 30 r_3 = 0$

$r_3 = 0$

$\Rightarrow r_2 + 12 \cdot 0 = 0$

$r_2 = 0$

$\Rightarrow r_1 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$

$r_1 = 0$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear unabhängig

3)

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} a & 1 \\ 1 & b \\ 2 & 2 \\ a & 1 \\ 1 & b \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 2-2b \\ 2-2a \\ ab-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 2 - 2b = -6$

$-2b = -8$

$b = 4$

$\Rightarrow 2 - 2a = 2$

$-2a = 0$

$a = 0$

$\Rightarrow a \cdot b - 1 = 11$

$0 \cdot 4 - 1 = 11$

$-1 = 11$ ↯

$\Rightarrow$ keine Lösung vorhanden

4) $A = \frac{1}{2} \cdot \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right|$

$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 12+1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{169+16+1}$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{186}$

$\approx 6{,}82$ FE

5) $r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & x & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & 3 & 2x-2 & 0 \\ 0 & 2 & x-4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{III} \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & 3 & 2x-2 & 0 \\ 0 & 0 & 4x-4-3x+12 & 0 \end{array} \right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & x & 0 \\ 0 & 3 & 2x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x+8 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow x + 8 = 0$

$x = -8$

$\Rightarrow$ Antwort: $x = -8$

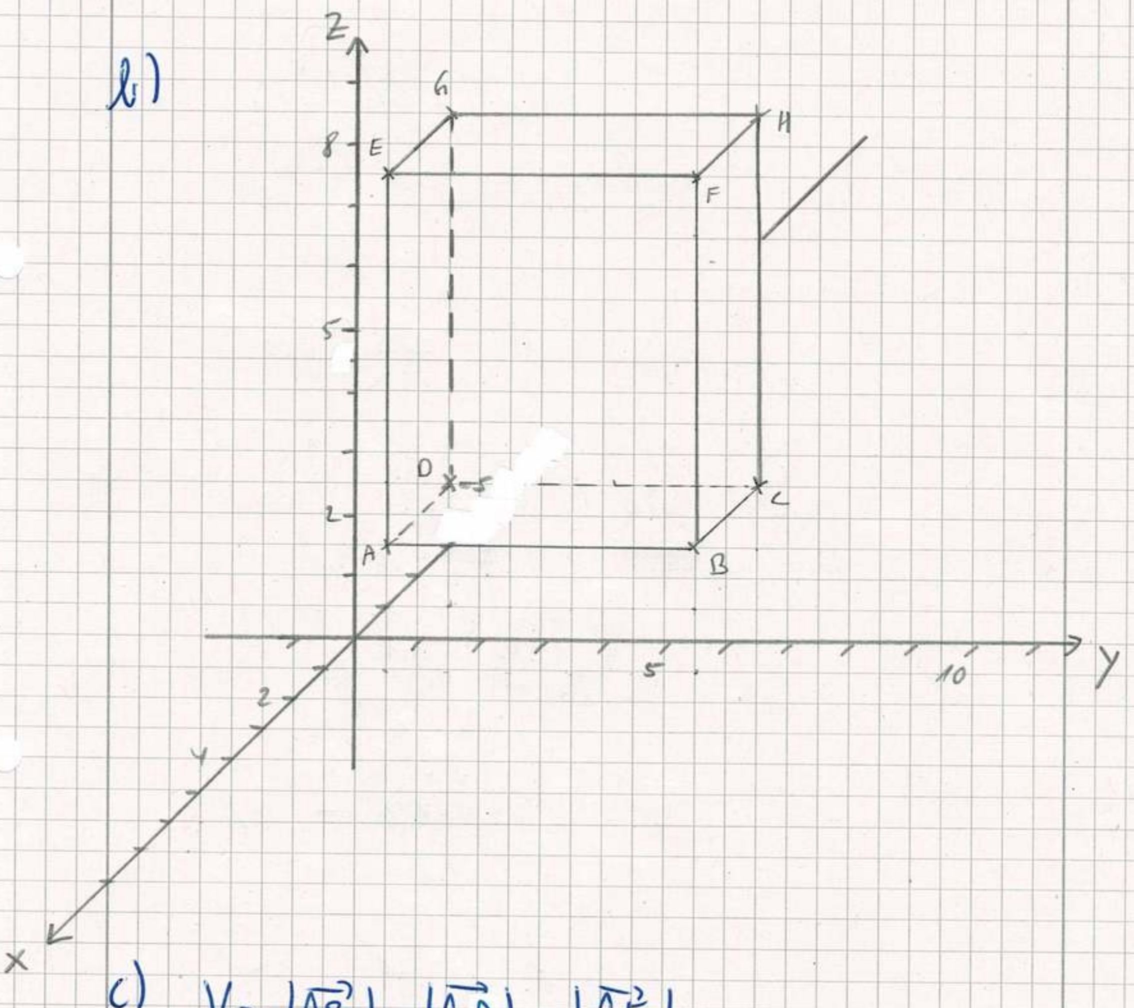
6a) D $(-1/1/2)$ — x-Wert wie C, y-Wert wie A, z-Wert wie A

E $(1/1/8)$ — E liegt über A (dieselbe x- und y-Koordinaten), z-Koordinate wie F

G $(-1/6/8)$ — G liegt über C (dieselben x- und y-Koordinaten), z-Koordinate wie F

H $(-1/1/8)$ — H liegt über D (x- und y-Wert gleich), z-Wert wie F

b)



c) $V = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}| \cdot |\vec{AE}|$

$= \left|\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right|$

$= 5 \cdot 2 \cdot 6$

$= 60$ VE

d) $V = \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right) \circ \overrightarrow{AE} \right|$

$= \left| \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$

$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$

$= 60$ VE

$$\begin{array}{cc} 0 & -2 \\ 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \\ 5 & 0 \end{array}$$