LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) a) $P(X=6) = \binom{12}{6} \cdot 0{,}6^6 \cdot 0{,}4^4 \approx 0{,}1766$

b) $P(X=7) = \binom{12}{7} \cdot 0{,}4^7 \cdot 0{,}6^3 \approx 0{,}1009$

c) $P(X=0) = \binom{12}{0} \cdot 0{,}6^0 \cdot 0{,}4^{12} = 1{,}677 \cdot 10^{-5} = 0{,}00001677$

$P(X=1) = \binom{12}{1} \cdot 0{,}6^1 \cdot 0{,}4^{11} = 3{,}012 \cdot 10^{-4} = 0{,}0003012$

$P(X=2) = \binom{12}{2} \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^{10} = 2{,}49 \cdot 10^{-3} = 0{,}00249$

$P(X=3) = \binom{12}{3} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^9 = 0{,}0125$

$P(X=4) = \binom{12}{4} \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^8 = 0{,}0420$

$P(X=5) = \binom{12}{5} \cdot 0{,}6^5 \cdot 0{,}4^7 = 0{,}1009$

$P(X=6) = 0{,}1766$ (siehe Teilaufgabe a)

$P(X=7) = \binom{12}{7} \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^5 = 0{,}2270$

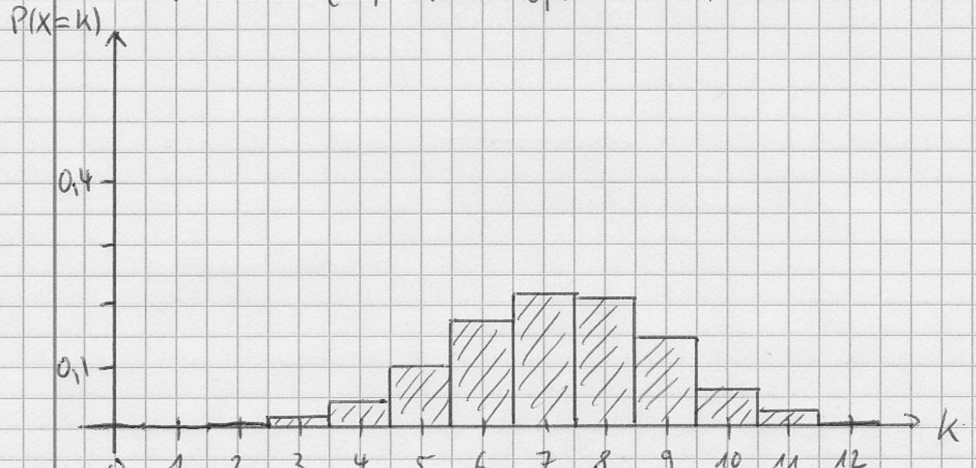
$P(X=8) = \binom{12}{8} \cdot 0{,}6^8 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}2128$

$P(X=9) = \binom{12}{9} \cdot 0{,}6^9 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}1419$

$P(X=10) = \binom{12}{10} \cdot 0{,}6^{10} \cdot 0{,}4^2 = 0{,}0639$

$P(X=11) = \binom{12}{11} \cdot 0{,}6^{11} \cdot 0{,}4^1 = 0{,}0174$

$P(X=12) = \binom{12}{12} \cdot 0{,}6^{12} \cdot 0{,}4^0 = 2{,}1768 \cdot 10^{-3} = 0{,}00217$



d) $P(X \leq 5) = P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=5)$
$= 0{,}1582$

e) $P(X < 9) = P(X \leq 8) = P(X=1) + P(X=2) + \ldots + P(X=8)$
$= 0{,}7747$

f) $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$
$= 1 - 0{,}7747$
$= 0{,}2253$

g) $P(5 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 5)$
$= 1 - P(X \leq 5)$
$= 1 - 0{,}1582$
$= 0{,}8418$

2) a) genau 15 Flaschen:

$P(X=15) = \binom{16}{15} \cdot 0{,}97^{15} \cdot 0{,}03$
$= 0{,}30396$
$\approx 0{,}304$

mind. 15 Flaschen

$P(X \geq 15) = P(X=15) + P(X=16)$
$= 0{,}3040 + 0{,}6143$
$= 0{,}9183$
$\approx 0{,}918$

weniger als 14 Flaschen:

$$P(X < 14) = P(X \leq 13)$$
$$= 0{,}0111279$$
$$\approx 0{,}011$$

b) mind. eine nicht zurückgegeben
$\Rightarrow$ zwischen 0 und 9 wurden zurückgegeben

$$P(X \leq 9) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=9)$$
$$= \binom{10}{0} \cdot 0{,}9^0 \cdot 0{,}1^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}9^1 \cdot 0{,}1^9 + \dots + \binom{10}{9} \cdot 0{,}9^9 \cdot 0{,}1$$
$$= 0{,}6513$$

gesucht: ab wie viel verkaufte Flaschen ist die die Wahrs. für die Rückgabe aller Flaschen höchst. 5 %

d.h.: wir suchen n mit

$$P(X = n) = \binom{n}{n} \cdot 0{,}9^n \cdot 0{,}1^0 \leq 0{,}05$$
$$0{,}9^n \leq 0{,}05$$

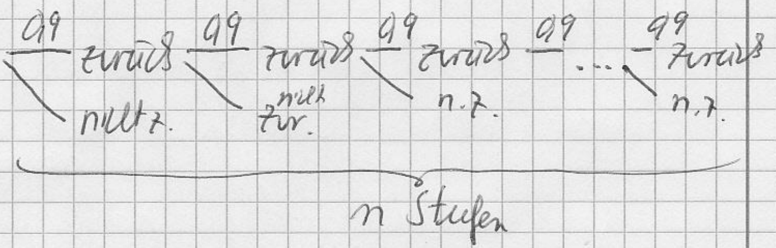
Kurzes Ausprobieren zeigt:

$$0{,}9^{28} = 0{,}05233$$
$$0{,}9^{29} = 0{,}0471$$

Antwort: Man muss mind. 29 Flaschen verkaufen.

Hinweis: $\binom{n}{n} = 1$

Dass sich die Gleichung auf $0{,}9^n \le 0{,}05$ reduziert, kann man sich auch mit einem Baumdiagramm verdeutlichen:



rechnerische Alternative zum Probieren:

$$0{,}9^n = 0{,}05 \quad | \log$$

$$\log_{0{,}9}(0{,}05) = n$$

$$28{,}433 \approx n$$

$\Rightarrow$ ab 29 Flaschen

c) Es ist Histogramm C.

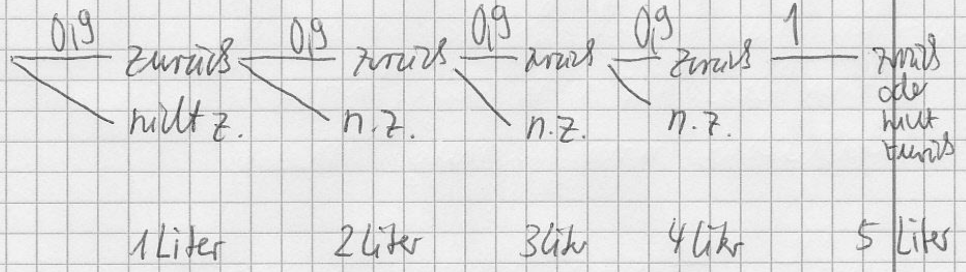
Es kann nicht Histogramm B sein, da die höchste Wahrscheinlichkeit bei $k = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ sein müsste. Hier ist sie bei ca. $k = 12$.

Es kann nicht Histogramm A sein, da die Wahrscheinlichkeit für $k = 10$ zu hoch ist

$$P(X=10) = \binom{100}{10} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{90} = 0{,}1319$$

In A kann man aber $P(X=10) > 0{,}14$ ablesen.

d) mind. 5 Liter:



P(mind. 5 Liter) $= 0{,}9^4 = 0{,}6561 \triangleq 65{,}61\,\%$

genau 5 Liter:

$\xrightarrow{0{,}9}$ zurück $\xrightarrow{0{,}9}$ zur. $\xrightarrow{0{,}9}$ zur. $\xrightarrow{0{,}9}$ zur. $\xrightarrow{0{,}1}$ n.z.

P(genau 5L.) $= 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}06561$

genau 6 Liter:

$\xrightarrow{0{,}9}$ zur. $\xrightarrow{0{,}9}$ zur $\xrightarrow{0{,}9}$ zur $\xrightarrow{0{,}9}$ zur $\xrightarrow{0{,}9}$ zur $\xrightarrow{1}$ ausverkauft oder nicht zurückgeben

P(genau 6 L.) $= 0{,}9^5 = 0{,}59049$

3) a) Wenn man annimmt, dass es jedes Mal nur 2 Möglichkeiten gibt (will studieren oder will nicht studieren) und die Wahrscheinlichkeit für „will studieren" konstant $p = 0{,}65$ ist, so haben wir eine Bernoulli-Kette vor uns.

n: Zahl der gefragten Personen

$p = 0{,}65$

b) genau 8 wollen studieren:

$$P(X=8) = \binom{8}{8} \cdot 0{,}65^8 \cdot 0{,}35^0$$
$$= 0{,}03186$$
$$\hat{=}\ 3{,}19\ \%$$

weniger als 3 wollen studieren:

$$P(X<3) = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= 0{,}0253$$
$$\hat{=}\ 2{,}53\ \%$$

$$P(3 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3)$$
$$= 0{,}9681 - 0{,}1061$$
$$= 0{,}862$$
$$\hat{=}\ 86{,}20\ \%$$

Die letzte Wahrs. gibt an, mit welcher Wahr. zwischen 3 und 7 Personen von 8 studieren wollen.

c) von 3 Personen:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - \binom{3}{0} \cdot 0{,}65^0 \cdot 0{,}35^3$$
$$= 1 - 0{,}35^3$$
$$= 0{,}957125$$

Von n Personen:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0)$$
$$= 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}65^0 \cdot 0{,}35^n$$
$$= 1 - 0{,}35^n$$

Wann beträgt die Wahrs. 99 %?

$$1 - 0{,}35^n = 0{,}99$$
$$-0{,}35^n = -0{,}01$$
$$0{,}35^n = 0{,}01 \quad | \log$$

$$n = \log_{0{,}35}(0{,}01)$$

$$n \approx 4{,}3866$$

$\Rightarrow$ mind. 5 Personen

Alternative: Ausprobieren

$$0{,}35^4 = 0{,}015$$
$$0{,}35^5 = 0{,}00525$$

4) a) nach 1 Jahr:

$$1{,}847 \cdot 1{,}026 = 1{,}895022 \text{ Mio. t}$$

Bestimmung von a und k:

$$f(0) = 1{,}847$$
$$f(0) = a \cdot e^{k \cdot 0} = 1{,}847$$
$$a \cdot e^0 = 1{,}847$$
$$a = 1{,}847$$

$\Rightarrow f(x) = 1{,}847 \cdot e^{k \cdot x}$

$f(1) = 1{,}895022$

$f(1) = 1{,}847 \cdot e^{k \cdot 1} = 1{,}895022$

$1{,}847 \cdot e^{k} = 1{,}895022$

$e^{k} = 1{,}026 \quad | \ln$

$k = \ln(1{,}026)$

$k = 0{,}02567$

$\Rightarrow f(x) = 1{,}847 \cdot e^{0{,}02567 x}$

b) $3{,}7 = 1{,}85 \cdot e^{0{,}0257 x}$

$2 = e^{0{,}0257 x} \quad | \ln$

$\ln(2) = 0{,}0257 x \quad | : 0{,}0257$

$\frac{\ln(2)}{0{,}0257} = x$

$26{,}97 \approx x$

$\Rightarrow$ Es wäre im Jahre 1997 der Fall.

c) $f(23) = 1{,}85 \cdot e^{0{,}0257 \cdot 23} \approx 3{,}3411$

Die Prognose liegt um 0,04 Mio t über dem realen Wert. Die Abweichung beträgt nur 1,2 %.
Die Prognose ist also relativ gut.

d) $F(x) = \frac{1{,}85}{0{,}0257} e^{0{,}0257 x} = 71{,}9844 \cdot e^{0{,}0257 x}$

$$\int_0^5 f(x)\,dx = \int_0^5 1{,}85 \cdot e^{0{,}0257x}\,dx$$

$$= \left[71{,}9844 \cdot e^{0{,}0257x}\right]_0^5$$

$$= 9{,}8706$$

Dieser Wert beschreibt, wie viele Mio. t Chrom zwischen 1970 und 1975 insgesamt verbraucht worden sind.

Hinweis:

$F(x) \longrightarrow f(x)$

insgesamt verbrauchte Menge — Verbrauch pro Jahr

e)

$$\int_0^t f(x)\,dx = 775$$

$$\int_0^t 1{,}85 \cdot e^{0{,}0257x}\,dx = 775$$

$$\left[71{,}9844 \cdot e^{0{,}0257x}\right]_0^t = 775$$

$$71{,}9844 \cdot e^{0{,}0257t} - 71{,}9844 \cdot e^{0} = 775$$

$$71{,}9844 \cdot e^{0{,}0257t} - 71{,}9844 = 775$$

$$71{,}9844 \cdot e^{0{,}0257t} = 846{,}9844$$

$$e^{0{,}0257t} = 11{,}76622 \quad | \ln$$

$$0{,}0257\,t = \ln(11{,}76622)$$

$$t = \frac{\ln(11{,}76622)}{0{,}0257}$$

$$t \approx 95{,}92$$

Die Vorräte wären im Jahre 2066 vollständig verbraucht.

f) Die Funktion $R(t)$ gibt für das Jahr $1993 + t$ an, wie viele Millionen t Chrom noch übrig sind.

$R(98{,}8) \approx 0$ bedeutet, dass aufbauend auf diese Werte nach ca. 99 Jahren alle Vorräte an Chrom abgebaut sein werden.

5) a) $f(x) = a \cdot e^{kx}$

$f(0) = 82$

$f(0) = a \cdot e^{k \cdot 0} = a = 82$

$f(1) = 82 \cdot 0{,}994 = 81{,}508$

$f(1) = 82 \cdot e^{k \cdot 1} = 81{,}508$

$e^{k} = 0{,}994 \quad | \ln$

$k = \ln(0{,}994)$

$k = -0{,}006018$

$k \approx -0{,}006$

b) $f(10) = 82 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 10} \approx 77{,}2247$

Es sind ca. 77,22 Mio.

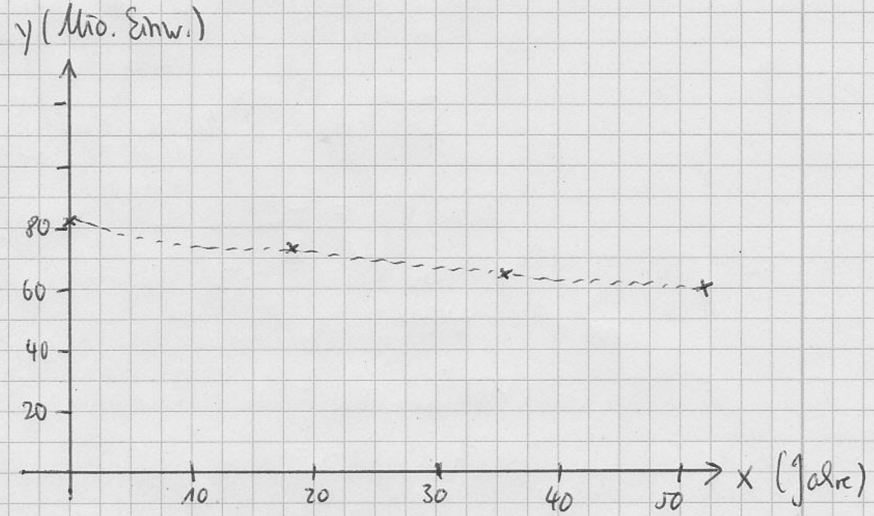
c) 90 % von 82 Mio. → 73,8

$$73{,}8 = 82 \cdot e^{-0{,}006x} \quad | :82$$
$$0{,}9 = e^{-0{,}006x} \quad | \ln$$
$$\ln(0{,}9) = -0{,}006x$$
$$\frac{\ln(0{,}9)}{-0{,}006} = x$$
$$17{,}56 = x$$

Die Reduktion um 10 % erfolgt alle ≈ 17,56 Jahre.

d. h.:

2000 → 2018 → 2036 → 2054
82 Mio 73,8 Mio 66,4 M. 59,8 M.



d) $$f'(x) = 82 \cdot (-0{,}006) \cdot e^{-0{,}006x}$$
$$= -0{,}492 \cdot e^{-0{,}006x}$$

$f'(x)$ gibt die Veränderungsrate an, also die Zunahme / Abnahme pro Jahr.

$$f'(0) = -0{,}492 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 0} = -0{,}492$$

Am 1.1.2000 hatte die Bev. eine momentane Abnahmerate von 492.000 pro Jahr. D.h.: Wenn die Bev. das ganze Jahr über konstant diese Veränderungsrate gehabt hätte, wäre sie nach 1 Jahr um 492.000 kleiner gewesen.

Wenn 492.000 einwandern, so wäre der Verlust ausgeglichen. Die Bev. zahl würde mehr oder weniger konstant bleiben.
Vorsicht: Sie wäre nur dann völlig konstant, wenn sie das ganze Jahr über eine konstante Veränderungsrate hätte.

e) $g(x) = a \cdot e^{-0{,}006x} + 7{,}3$

$$g(0) = 82 \Rightarrow 82 = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot 0} + 7{,}3$$
$$82 = a \cdot e^{0} + 7{,}3$$
$$82 = a + 7{,}3$$
$$74{,}7 = a$$

für 2050:

$$f(50) = 82 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 50} = 60{,}747$$
$$f(50) \approx 60{,}75 \text{ Mio.}$$

$g(50) = 74{,}7 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 50} + 7{,}3 = 62{,}6391$

$g(50) \approx 62{,}64$ Mio.

Bei Prognose 1 gibt es eine Redußtion um 25,91 %, bei Prognose 2 um 23,61 %.

Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} 74{,}7 \cdot e^{-0{,}006x} + 7{,}3$$
$$= 7{,}3$$

$$\left(\text{da } 74{,}7 \cdot e^{-0{,}006x} \longrightarrow 0\right)$$

Der Grenzwert besagt, dass sich die Bev. bei 7,3 Mio. Einwohnern einpendeln würde (die Einwanderung würde genau der Abnahme entsprechen). Da dieses Ereignis aber in ferner Zukunft ($x > 50$) stattfinden würde, ist es eigentlich nur hypothetisch, da sich Prognosen in seriöser Weise nur über höchstens 50 Jahre machen lassen.

f) $h(x) = a \cdot e^{-0{,}006x} + b$

Es gilt: $\lim_{x \to \infty} h(x) = \lim_{x \to \infty} \left(a \cdot e^{-0{,}006x} + b\right) = b$

$$\left(\text{da } a \cdot e^{-0{,}006x} \longrightarrow 0\right)$$

0,6 % von b sollen 0,1 Mio. sein

$\Rightarrow 0{,}006 \cdot b = 0{,}1$

$b = 16{,}\overline{6}$

$\Rightarrow a \cdot e^{-0{,}006x} + 16{,}\overline{6} = h(x)$

$h(0) = 82 \Rightarrow \quad 82 = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot 0} + 16{,}\overline{6}$

$65{,}\overline{3} = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot 0}$

$65{,}\overline{3} = a$

$\Rightarrow h(x) = 65{,}\overline{3} \cdot e^{-0{,}006x} + 16{,}\overline{6}$

6) a) Nullstellen: $10 \cdot x \cdot e^{-0{,}2x} = 0$

$10x = 0$ oder $e^{-0{,}2x} = 0$

$x = 0 \qquad \lightning$

$\Rightarrow N(0/0)$

Grenzwerte: $\lim\limits_{x \to \infty} 10x \cdot e^{-0{,}2x} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 10x \cdot e^{-0{,}2x} = -\infty$

Schnittpunkte:

$f(x) = h(x)$

$10x \cdot e^{-0{,}2x} = x$

$10x \cdot e^{-0{,}2x} - x = 0$

(TR ...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 11{,}51$

$\Rightarrow S_1\,(0/0)$

$S_2\,(11{,}51/11{,}51)$

b) $f(x) = 10x \cdot e^{-0{,}2x}$

$f'(x) = 10 \cdot e^{-0{,}2x} + 10x \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2x}$

$= 10\,e^{-0{,}2x} + (-2x) \cdot e^{-0{,}2x}$

$= (-2x+10) \cdot e^{-0{,}2x}$

Extrempunkt:

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$(-2x+10) \cdot e^{-0{,}2x} = 0$

$-2x+10 = 0$ oder $e^{-0{,}2x} = 0$ ↯

$10 = 2x$

$5 = x$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(x) = (-2) \cdot e^{-0{,}2x} + (-2x+10) \cdot (-0{,}2) \cdot e^{-0{,}2x}$

$= (-2) \cdot e^{-0{,}2x} + (0{,}4x-2) \cdot e^{-0{,}2x}$

$= (0{,}4x-4) \cdot e^{-0{,}2x}$

$f''(5) = (2-4) \cdot e^{-0{,}2x}$

$= -2 \cdot e^{-0{,}2x} < 0$

$\Rightarrow$ Max.

y-Wert:

$f(5) = 10 \cdot 5 \cdot e^{-0{,}2 \cdot 5}$

$= 50 \cdot e^{-1}$

$= \frac{50}{e}$

$\Rightarrow HP\,(5/\frac{50}{e})$

$HP\,(5/18{,}39)$

Am Schaubild kann man sehen:

$f''(5) < 0 \Rightarrow HP$

Für Wendestellen muss gelten:

Notw. Bed.: $f''(x) = 0$

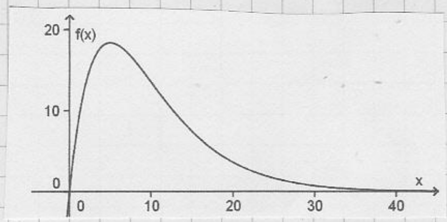
Das ist laut Schaubild bei $x = 10$

Hinr. Bed.: $f''(x) = 0 \wedge$ Vorzeichenwechsel von f''

Das Schaubild zeigt einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$

$\Rightarrow$ Wendestelle bei $x = 10$

c)



d) Die Anzahl der Personen, die das Gebäude pro Minute verlassen, bezeichnen wir kurz als Personenrate. Unmittelbar bei Auslösen des Alarms verlassen noch keine Personen das Gebäude, die Personenrate ist also null. Sie steigt dann schnell an und erreicht nach 5 Minuten mit gut 18 Personen pro Minute ihr Maximum. Danach fällt die Rate ab und läuft gegen null: Nur noch sporadisch verlassen Personen das Gebäude.

e)

$F(x) = (-250 - 50x) \cdot e^{-0,2x} + c$

$F'(x) = -50 \cdot e^{-0,2x} + (-250 - 50x) \cdot (-0,2) \cdot e^{-0,2x}$

$= -50 e^{-0,2x} + (50 + 10x) \cdot e^{-0,2x}$

$= 10x \cdot e^{-0,2x}$ ✓

sinnvolle Annahme: Am Anfang hat noch niemand das Gebäude verlassen

$\Rightarrow F(0) = 0$

$$F(0) = 0 \Rightarrow (-250 - 50 \cdot 0) \cdot e^{-0{,}2 \cdot 0} + c = 0$$

$$-250 \cdot e^{0} + c = 0$$

$$-250 + c = 0$$

$$c = 250$$

$$\Rightarrow F(x) = (-250 - 50x) \cdot e^{-0{,}2x} + 250$$

$$\int_0^{20} f(x)\,dx = \int_0^{20} 10x \cdot e^{-0{,}2x}\,dx$$

$$= \left[(-250 - 50x) \cdot e^{-0{,}2x}\right]_0^{20}$$

$$= (-250 - 50 \cdot 20) \cdot e^{-0{,}2 \cdot 20} - (-250 - 0) \cdot e^{0}$$

$$= (-1250) e^{-4} - (-250)$$

$$= (-1250) \cdot e^{-4} + 250$$

$$= 227{,}11$$

Das Integral ermittelt die Gesamtzahl der Personen, die ab dem Alarm bis zum Zeitpunkt $x = 20$ das Gebäude verlassen haben. Es befinden sich damit bei Ende der Übung noch etwa 23 Personen im Gebäude, so dass die Übung nicht als erfolgreich gelten kann.