LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1) a) $f'(x) = 5 \cdot e^{5x}$

$f''(x) = 25 \cdot e^{5x}$

b) $f'(x) = 6 \cdot e^{2x}$

$f''(x) = 12 \cdot e^{2x}$

c) $f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x+2) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= 1 \cdot e^{2x} + (2x+4) \cdot e^{2x}$

$= (1 + 2x + 4) \cdot e^{2x}$

$= (2x+5) \cdot e^{2x}$

$f''(x) = 2 \cdot e^{2x} + (2x+5) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= 2e^{2x} + (4x+10) \cdot e^{2x}$

$= (4x+12) \cdot e^{2x}$

d) $f'(x) = (2x+3) \cdot e^{2x} + (x^2+3x+5) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= (2x+3) \cdot e^{2x} + (2x^2+6x+10) \cdot e^{2x}$

$= (2x^2 + 8x + 13) \cdot e^{2x}$

$f''(x) = (4x+8) \cdot e^{2x} + (2x^2+8x+13) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= (4x+8) \cdot e^{2x} + (4x^2+16x+26) \cdot e^{2x}$

$= (4x^2+20x+34) \cdot e^{2x}$

e) $f'(x) = 3 \cdot e^{-3x} + (3x+4) \cdot (-3) \cdot e^{-3x}$

$= 3e^{-3x} + (-9x-12) \cdot e^{-3x}$

$= (-9x-9) \cdot e^{-3x}$

$f''(x) = -9 \cdot e^{-3x} + (-9x-9) \cdot (-3) \cdot e^{-3x}$

$= -9e^{-3x} + (27x+27) \cdot e^{-3x}$

$= (27x+18) \cdot e^{-3x}$

f) $f'(x) = 2x \cdot e^{6x} + (x^2+5) \cdot 6 \cdot e^{6x}$

$= 2x\, e^{6x} + (6x^2+30) \cdot e^{6x}$

$= (6x^2+2x+30) \cdot e^{6x}$

$$f''(x) = (12x+2)\cdot e^{6x} + (6x^2+2x+30)\cdot 6\cdot e^{6x}$$
$$= (12x+2)\cdot e^{6x} + (36x^2+12x+180)\cdot e^{6x}$$
$$= (36x^2+24x+182)\cdot e^{6x}$$

g) $$f'(x) = -5\cdot e^{-6x} + (-5x+9)\cdot(-6)\cdot e^{-6x}$$
$$= -5e^{-6x} + (30x-54)\cdot e^{-6x}$$
$$= (30x-59)\cdot e^{-6x}$$

$$f''(x) = 30\cdot e^{-6x} + (30x-59)\cdot(-6)\cdot e^{-6x}$$
$$= 30e^{-6x} + (-180x+354)\cdot e^{-6x}$$
$$= (-180x+384)\cdot e^{-6x}$$

h) $$f'(x) = 2x\cdot e^{x^2} + (x^2+2)\cdot 2x\cdot e^{x^2}$$
$$= 2x\cdot e^{x^2} + (2x^3+4x)\cdot e^{x^2}$$
$$= (2x^3+6x)\cdot e^{x^2}$$

$$f''(x) = (6x^2+6)\cdot e^{x^2} + (2x^3+6x)\cdot 2x\cdot e^{x^2}$$
$$= (6x^2+6)\cdot e^{x^2} + (4x^4+12x^2)\cdot e^{x^2}$$
$$= (4x^4+18x^2+6)\cdot e^{x^2}$$

2) $$f'(x) = 6\cdot e^{2x}$$
$$f''(x) = 12\cdot e^{2x}$$
$$f^{(n)}(x) = 3\cdot 2^n\cdot e^{2x}$$

3) $$f(x) = 3\cdot 2^x = 3\cdot e^{\ln(2)\cdot x}$$
$$f'(x) = 3\cdot \ln(2)\cdot e^{\ln(2)\cdot x}$$

4) Es gilt:

(1) $f(0) = -2\cdot e^{95\cdot 0} = -2\cdot e^0 = -2$

$\Rightarrow$ $P(0|-2)$ liegt auf dem Graphen

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Graph a widerspricht Bedingung (2) und (3),
Graph c " " (2) " (3),
Graph d " " (2)
Graph e " " (3)
Graph f " " (3)
$\Rightarrow$ Graph b ist der gesuchte Graph.

5) a) $2x^3 - ax^2 = 0$

$x^2(2x - a) = 0$

$x^2 = 0$ oder $2x - a = 0$

$x = 0$ $\quad 2x = a$

$x = \frac{a}{2}$

$\Rightarrow N_1(0/0)$

$N_2(\frac{a}{2}/0)$

b) $f(1) = 1 \Rightarrow 2 \cdot 1^3 - a \cdot 1^2 = 1$

$2 - a = 1 \quad | -1$

$1 - a = 0 \quad | +a$

$1 = a$

c) $f_a(x) = 2x^3 - ax^2$

$f_a'(x) = 6x^2 - 2ax$

$f_a''(x) = 12x - 2a$

Notw. Bed.: $f_a'(x) = 0$

$6x^2 - 2ax = 0$

$x \cdot (6x - 2a) = 0$

$x = 0$ oder $6x - 2a = 0$

$6x = 2a$

$x = \frac{1}{3}a$

Hinr. Bed.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(0) = 12 \cdot 0 - 2a = -2a < 0$

$\Rightarrow$ Max. bei $x = 0$

$f_a''(\frac{1}{3}a) = 12 \cdot \frac{1}{3}a - 2a = 4a - 2a = 2a > 0$

$\Rightarrow$ Min. bei $x = \frac{1}{3}a$

y-Werte:

$f_a(0) = 2 \cdot 0^3 - a \cdot 0^2 = 0$

$f_a(\frac{1}{3}a) = 2 \cdot (\frac{1}{3}a)^3 - a \cdot (\frac{1}{3}a)^2$

$= 2 \cdot \frac{1}{27}a^3 - a \cdot \frac{1}{9}a^2$

$= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{9}a^3$

$= -\frac{1}{27}a^3$

Extremstellen: HP $(0/0)$

TP $(\frac{1}{3}a / -\frac{1}{27}a^3)$

6) a) $(x-a) \cdot e^{2x} = 0$

$x - a = 0$ oder $e^{2x} = 0$

$x = a$ ↯

$\Rightarrow N(a/0)$

b) $f(0) = 2 \Rightarrow (0-a) \cdot e^{2 \cdot 0} = 2$

$-a \cdot e^0 = 2$

$-a = 2$

$a = -2$

c) $f_a(x) = (x-a) \cdot e^{2x}$

$f_a'(x) = 1 \cdot e^{2x} + (x-a) \cdot 2 \cdot e^{2x}$

$= 1 \cdot e^{2x} + (2x - 2a) \cdot e^{2x}$

$$= (2x-2a+1)\cdot e^{2x}$$

$$f_a''(x) = 2\cdot e^{2x} + (2x-2a+1)\cdot 2\cdot e^{2x}$$
$$= 2e^{2x} + (4x-4a+2)\cdot e^{2x}$$
$$= (4x-4a+4)\cdot e^{2x}$$

Notw. Bed.: $f_a'(x)=0$

$$(2x-2a+1)\cdot e^{2x} = 0$$
$$2x-2a+1=0 \text{ oder } e^{2x}=0 \ ↯$$
$$2x = 2a-1$$
$$x = \frac{2a-1}{2}$$

Hinr. Bed.: $f_a'(x)=0 \wedge f_a''(x)\neq 0$

$$f_a''\left(\frac{2a-1}{2}\right) = \left(4\cdot\frac{2a-1}{2} - 4a+4\right)\cdot e^{2a-1}$$
$$= (4a-2-4a+4)\cdot e^{2a-1}$$
$$= 2\cdot e^{2a-1} > 0$$

$\Rightarrow$ Min. bei $x=\frac{2a-1}{2}$

y-Wert:

$$f_a\left(\frac{2a-1}{2}\right) = \left(\frac{2a-1}{2}-a\right)\cdot e^{2a-1}$$
$$= (a-0{,}5-a)\cdot e^{2a-1}$$
$$= -0{,}5\cdot e^{2a-1}$$

Extremstelle: $TP\left(\frac{2a-1}{2} \,/\, -0{,}5\cdot e^{2a-1}\right)$

7) $$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot 1} - \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot 0}$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}$$

8) a) $\binom{30}{2} \cdot 0{,}65^{2} \cdot 0{,}35^{28} = P(X=2)$

b) $P(X=6) = \binom{30}{6} \cdot 0{,}65^{6} \cdot 0{,}35^{24}$

c) Mit welcher Wahrs. erhält man genau 9-mal „Kopf"?

d) Mit welcher Wahrs. erhält man genau 16-mal „Zahl"?
Bei diesem Beispiel ist „Zahl" statt „Kopf" der Treffer.

9) a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$

c) $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = \frac{12}{2} = 6$

d) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$

10) Die in Abbildung a dargestellte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die richtige.

Die in b dargestellte ist falsch, da das Experiment $n=6$ statt $n=5$ Durchläufe hat.

Die in c dargestellte ist falsch, da die höchste Wahrscheinlichkeit bei $k=2$ und $k=3$ auftaucht.

Sie muss eine Trefferwahrscheinlichk. von ca. $p \approx 0{,}5$ haben statt $p = 0{,}7$

Die in d dargestellte hat ihre höchsten Wahrs. bei ca. 1. Sie muss eine Trefferwahrscheinlichkeit von $p < 0{,}5$ statt $p = 0{,}7$ haben.

11) Der höchste Wert für k ist 8. Es gilt also $n = 8$.
Die höchste Wahrscheinlichkeit liegt bei $k = 2$.
Also $p \approx \frac{2}{8} = 0{,}25$

12) a) Wir ziehen ohne Zurücklegen $\Rightarrow$ keine Binomialverteilung, da sich die Wahrscheinlichkeiten von Stufe 1 zu Stufe 2 verändern

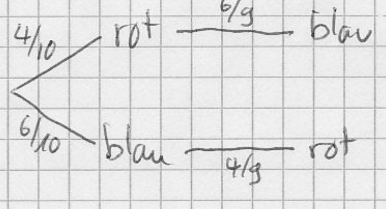
$\xrightarrow{4/10}$ rot $\xrightarrow{3/9}$ rot

$$P(\text{nur rot}) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$$

b) $\xrightarrow{6/10}$ blau $\xrightarrow{5/9}$ blau

$$P(\text{nur blau}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

c)



$P(\text{eine rot})$

$$= \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \frac{24}{90} + \frac{24}{90}$$

$$= \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$