AUFGABEN (HILFSMITTELFREIER TEIL)

1) Bestimme jeweils die erste und die zweite Ableitung:

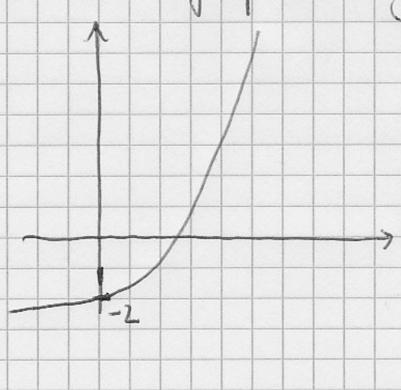
a) $f(x) = e^{5x}$
b) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$
c) $f(x) = (x+2) \cdot e^{2x}$
d) $f(x) = (x^2+3x+5) \cdot e^{2x}$
e) $f(x) = (3x+4) \cdot e^{-3x}$
f) $f(x) = (x^2+5) \cdot e^{6x}$
g) $f(x) = (-5x+9) \cdot e^{-6x}$
h) $f(x) = (x^2+2) \cdot e^{x^2}$

2) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$. Bestimme die erste, die zweite und die n-te Ableitung.

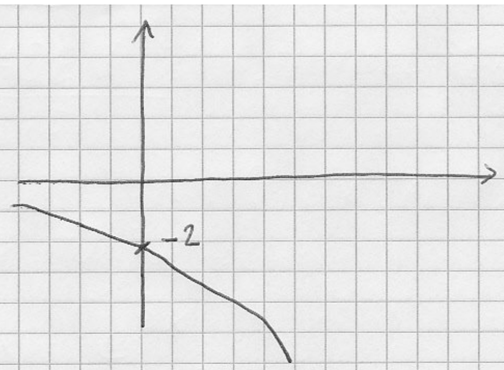
3) Bestimme die erste Ableitung:
$f(x) = 3 \cdot 2^x$

4) Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2 \cdot e^{0,5x}$. Welcher der Graphen gehört zu f?

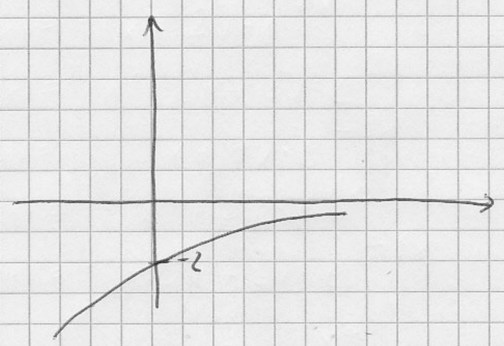
ⓐ



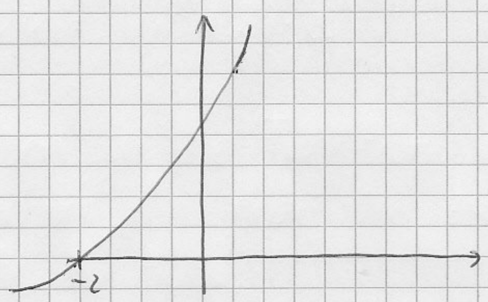
(b)



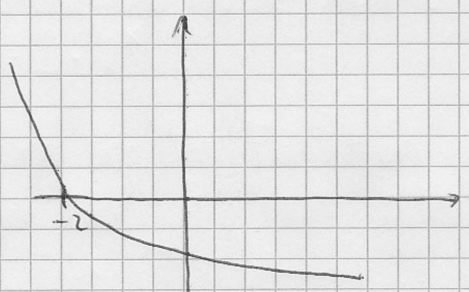
(c)



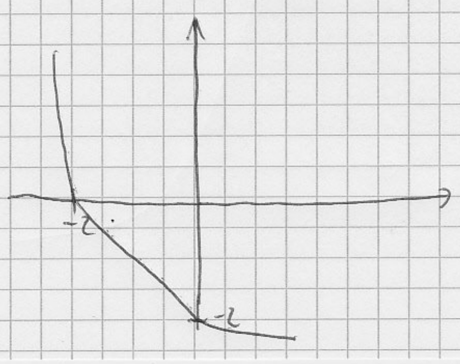
(d)



(e)



(f)



5) Gegeben ist die Funktionenschar
$f_a(x) = 2x^3 - a \cdot x^2$, $a > 0$

a) Bestimme die Nullstellen in Abhängigkeit von a

b) Wie muss man a wählen, damit $f(1) = 1$ gilt?

c) Bestimme die Extremstellen in Abhängigkeit von a.

6) Gegeben ist die Funktionenschar
$f_a(x) = (x - a) \cdot e^{2x}$, $a > 0$

a) Bestimme die Nullstelle in Abhängigkeit von a.

b) Wie muss man a wählen, damit $f(0) = 2$ gilt?

c) Bestimme die Extremstelle in Abhängigkeit von a.

7) Rechne aus:

$$\int_0^1 e^{2x}\,dx = \ldots ?$$

8) Wir werfen eine manipulierte Münze 30-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten beträgt 65 %.

a) Gib einen Term an, mit dem man ausrechnen könnte, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau 2-mal „Kopf" erhält.

b) Gib einen Term an, mit dem man ausrechnen könnte, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau 6-mal „Kopf" erhält.

c) Gegeben sei der folgende Term:

$$\binom{30}{9} \cdot 0{,}65^{9} \cdot 0{,}35^{21}$$

Was könnte man mit diesem Term ausrechnen?

d) Gegeben sei der folgende Term:

$$\binom{30}{16} \cdot 0{,}35^{16} \cdot 0{,}65^{14}$$

Was könnte man mit diesem Term ausrechnen?

9) Rechne aus:

a) $4!$

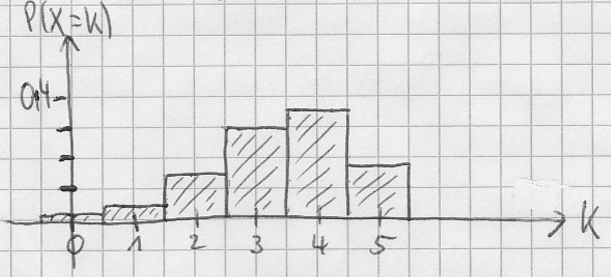
b) $\frac{5!}{3!}$

c) $\binom{4}{2}$

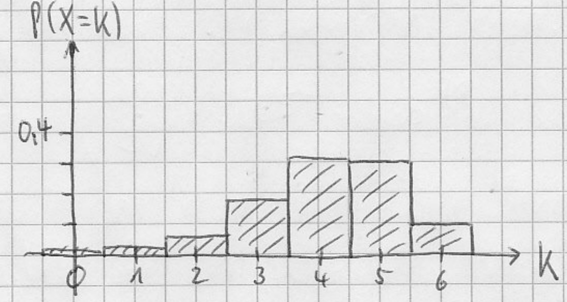
d) $\binom{5}{2}$.

10) Wir werfen eine manipulierte Münze 5-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten beträgt 70 %.
Welche der unten dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilungen gehört zu diesem Experiment?

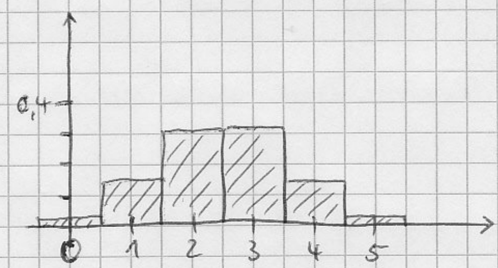
a)



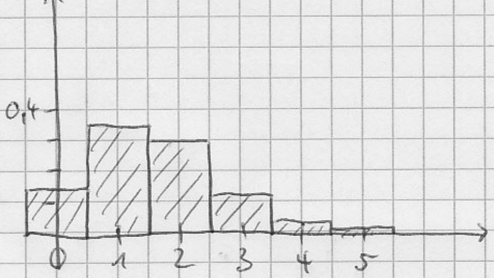
b)



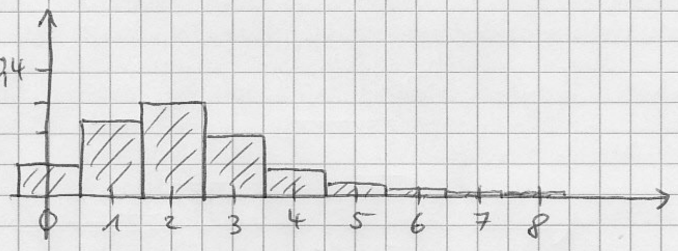
c)



d)



11) Wir werfen eine manipulierte Münze n-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten, beträgt p %. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung sieht folgendermaßen aus:



Es liegt eine Binomialverteilung vor. Bestimme n und einen ungefähren Wert für p.

12) In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Davon sind 4 rot und 6 blau. Wir ziehen ohne Zurücklegen zwei Kugeln.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei rote Kugeln?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwei blaue Kugeln?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau eine rote Kugel?

Aufgaben (Teil mit Hilfsmitteln)

1) In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Davon sind sechs rot und vier grün. Wir ziehen 12-mal mit Zurücklegen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau 6-mal eine rote Kugel?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau 7-mal eine grüne Kugel?

c) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe eines Histogramms dar. Wir betrachten das Ziehen einer roten Kugel als „Treffer".

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man höchstens 5-mal eine rote Kugel?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man weniger als 9-mal eine rote Kugel?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens 9-mal eine rote Kugel?

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwischen 5-mal und 12-mal eine rote Kugel?

2) Mehrwegflaschen (Vorbild: Abitur Bremen 2010)

Mehrwegflaschen haben eine sehr hohe Rücklaufquote. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Flasche zurückgegeben wird, heißt Rückgabewahrscheinlichkeit. Bei Milchflaschen liegt sie bei 90%, bei Bierflaschen und Mineralwasserflaschen zwischen 96% und 98%.

a) Es werden zunächst Mehrweg-Mineralwasserflaschen betrachtet. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit pro Flasche von $p_W = 0{,}97$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 16 einzeln verkauften Flaschen

- genau 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- mindestens 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- weniger als 14 Flaschen zurückgegeben werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

b) Jetzt betrachten wir Mehrweg-Milchflaschen mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit von $p_M = 0{,}9$ pro Flasche.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 einzeln verkauften Milchflaschen mindestens eine *nicht* zurückgegeben wird.

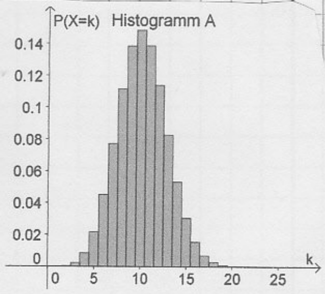
Ermitteln Sie, ab wie vielen verkauften Milchflaschen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurückkommen, höchstens 5% beträgt und formulieren Sie einen Antwortsatz.

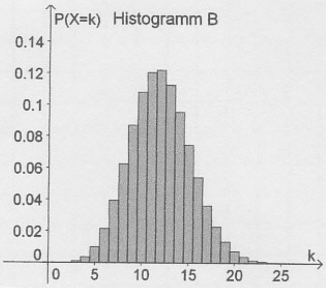
c) Ein kleiner Supermarkt verkauft pro Woche ca. 100 Flaschen Milch ($1\,l$ Mehrwegflaschen).

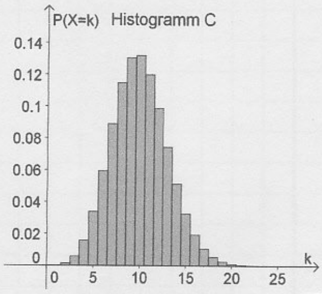
Hier sehen Sie die Histogramme von drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Entscheiden Sie, welches dieser Histogramme zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße

X: Anzahl der nicht zurückgegebenen Flaschen mit $n = 100;\ p = 0{,}1$ gehört.

Begründen Sie jeweils mit einem Argument, warum es die beiden anderen Diagramme nicht sein können.







d) Bei den Milch-Mehrwegflaschen handelt es sich um Literflaschen. Jede zurückgegebene Flasche wird wieder gefüllt und verkauft.

- Erklären Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Flasche mindestens 5 Liter Milch verkauft werden, $0{,}9^4 = 65{,}61\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mit einer Flasche genau 5 Liter Milch verkaufen lassen.

Wir nehmen an, dass eine Flasche nach 6 Füllungen wegen möglicher Beschädigungen aussortiert wird[1].

- Bestimmen Sie unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 6 Liter Milch mit einer Flasche verkauft werden.

3) Studienwünsche (Vorbild: Abitur Bremen 2009)

Für die Abiturientinnen und Abiturienten des Jahres 1999 lag die Quote derjenigen, die fest geplant hatten ein Studium aufzunehmen, bei 65%. Diesen Prozentsatz nennt man „Brutto-Studierquote".

Nehmen Sie für die Aufgabenteile a) bis d) folgendes an:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Person des Abiturjahrgangs 2009 zu denjenigen gehört, die studieren wollen, beträgt wie 10 Jahre zuvor $0{,}65$.

a) Erläutern Sie, warum man die Befragung von n zufällig ausgewählten Personen des Abiturjahrgangs 2009 nach ihrer Studierabsicht als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann.

b) Es werden 8 Personen des Abiturjahrgangs 2009 zufällig befragt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass von ihnen

- genau 8 studieren wollen.
- weniger als 3 studieren wollen.

Bestimmen Sie $P(3 \leq X \leq 7)$ und erläutern Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass von 3 Personen des Abiturjahrgangs 2009 mindestens eine studieren will.

Ermitteln Sie eine allgemeine Berechnungsformel, die angibt, wie die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt wird, dass von n Personen des Abiturjahrgangs 2009 mindestens eine studieren will.

Bestimmen Sie die kleinste Anzahl an Personen des Abiturjahrgangs 2009, die zufällig ausgewählt und befragt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% oder mehr mindestens eine studierwillige Person unter ihnen ist.

4) Verbrauch von Chrom (Vorbild: Abitur Bremen 2007)

Im Jahr 1970 wurden $1{,}847$ Millionen Tonnen der Chromvorräte der Erde verbraucht. Im folgenden Jahr wuchs der jährliche Verbrauch um $2{,}6\%$. 1970 ging man davon aus, dass sich der Jahres-Chrom-Verbrauch $f(x)$ durch eine Exponentialfunktion modellieren lässt:

$$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x},\ x \geq 0$$

$f(x)$ gibt den Chromverbrauch in Millionen Tonnen pro Jahr an, x steht für die Anzahl der Jahre ab 1970.

a) Berechnen Sie, auf wie viele Millionen Tonnen pro Jahr der Verbrauch nach einem Jahr angestiegen ist. Bestimmen Sie aus den gegebenen Daten die Konstanten a und k. Runden Sie k auf fünf Nachkommastellen.

Verwenden Sie für die weiteren Aufgabenteile zur Prognose des Jahres-Chrom-Verbrauchs ab 1970 die Funktion f mit

$$f(x) = 1{,}85 \cdot e^{0{,}0257 \cdot x},\ x \geq 0$$

b) Berechnen Sie das Jahr, in dem sich nach diesem Modell der Verbrauch pro Jahr verdoppelt hätte.

c) Nach einer Veröffentlichung des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung lag der Chrom-Verbrauch im Jahr 1993 bei $3{,}3$ Millionen Tonnen pro Jahr. Geben Sie an, ob dieser Wert noch mit den Prognosen von 1970 verträglich ist.

d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f.

Berechnen Sie das Integral $\int_0^5 f(x)\,dx$. Erläutern Sie, welche Größe durch dieses Integral für die Chromindustrie näherungsweise angegeben wird.

e) Um 1970 wurden die Chromvorräte der Erde auf 775 Millionen Tonnen geschätzt. Berechnen Sie das Jahr, in dem diese Chromreserven vollständig aufgebraucht wären.

f) In den achtziger Jahren wurden neue Chromvorräte entdeckt. Im Jahr 1993 ging man von einem Vorrat von ca. 1500 Millionen Tonnen aus. Erläutern Sie, was mit

$$R(t) = 1500 - \int_0^t (3{,}3 \cdot e^{0{,}0257 \cdot x})dx \text{ für } t \geq 0$$

berechnet wird. t steht für die Anzahl der Jahre nach 1993. Beachten Sie dazu Aufgabenteil c). Es gilt $R(98{,}8) \approx 0$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

5) Bevölkerung (Vorbild: Abitur Bremen 2010)

Am Anfang des Jahres 2000 hatte Deutschland etwa 82 Millionen Einwohner.
Für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland ging eine UN-Studie aus dem Jahre 2000 davon aus, dass die Bevölkerung pro Jahr etwa um 0,6% abnimmt. Diese Entwicklung der Bevölkerung soll durch eine Funktion f mit einer Gleichung des Typs $f(x) = a \cdot e^{kx}$, $x \geq 0$ modelliert werden,
x ist die Zeit in Jahren nach dem 1.1.2000, $f(x)$ die Bevölkerung in Millionen zum Zeitpunkt x.
Dabei bleiben Zu- und Abwanderungen unberücksichtigt.
Gehen Sie in den Aufgaben a) bis e) von unveränderten Bedingungen in den Folgejahren aus.

a) Begründen Sie rechnerisch, dass die Gleichung für $a = 82$ und $k \approx -0{,}006$ die Situation modelliert.

b) Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl am Anfang des Jahres 2010 zu erwarten ist.

c) Berechnen Sie den Zeitraum, in dem sich die Bevölkerungszahl jeweils um 10% verringert.
Skizzieren Sie den Graphen von f mit Hilfe von drei auf das Jahr 2000 folgenden Zeiträumen, in denen sich die Bevölkerungszahl jeweils um 10% verringert, in das beigefügte Koordinatensystem.
Runden Sie sowohl die Anzahl der Jahre als auch die Funktionswerte auf eine Nachkommastelle.

d) Bestimmen Sie unter Angabe des Rechenweges die Ableitungsfunktion f'. Berechnen und interpretieren Sie den Wert $f'(0)$.
Gehen Sie davon aus, dass ab 2000 jährlich eine Zuwanderung* von Menschen im Umfang des Wertes von $|f'(0)|$ in Mio. erfolgt und erläutern Sie, warum damit die Bevölkerungszahl in Deutschland in etwa konstant bleibt.

Im Folgenden wird von einer jährlichen Zuwanderung ab 2000 von 44000 Menschen ausgegangen. Es wird angenommen, dass sich die zugewanderte Bevölkerung auch jährlich um 0,6% verringert.
Als Modellfunktion für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland unter diesen Bedingungen dient die Funktion g mit folgender Gleichung

$$g(x) = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot x} + 7{,}3, \quad x \text{ Zeit in Jahren nach dem } 1.1.2000, \ g(x) \text{ in Millionen Menschen,}$$

in der 0,6% von 7,3 Mio. den 44000 Zuwanderern entsprechen.

e) Ermitteln Sie a mit Hilfe von $g(0) = 82$. (Lösung: $a = 74{,}7$)
Berechnen Sie die Werte für das Jahr 2050 mit den Gleichungen von f und g und vergleichen Sie diese mit dem Wert aus dem Jahr 2000 auf die Bevölkerungsentwicklung bezogen.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und schätzen Sie dessen Bedeutung für die Realität ein, wenn man davon ausgehen kann, dass seriöse Prognosen zu Bevölkerungsentwicklungen über höchstens 50 Jahre gemacht werden.

f) Stellen Sie analog zur Funktion g eine Funktionsgleichung für eine Funktion h auf, die statt einer Zuwanderung von 44000 Menschen pro Jahr eine Zuwanderung von 100000 Menschen pro Jahr berücksichtigt. Gehen Sie dabei davon aus, dass 0,6% des Grenzwertes der Funktion h gerade der Zuwanderung von 100000 entsprechen.

zu c)

6) Funktion (Bremen 2011)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x)=10\cdot x\cdot e^{-0,2x}\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

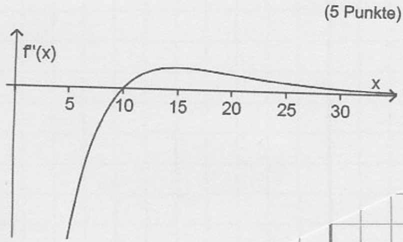
a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.

Untersuchen Sie die Funktionswerte von f für $x\to-\infty$ und $x\to+\infty$.

Die Funktion $h(x)=x$ beschreibt die Winkelhalbierende durch den 1. und 3. Quadranten des Koordinatensystems. Bestimmen Sie alle Punkte, in denen sich die Graphen von f und h schneiden.

(5 Punkte)

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f und ermitteln Sie mit ihrer Hilfe den Extrempunkt des Graphen von f.



Rechts ist der Graph der zweiten Ableitung von f dargestellt. Begründen Sie anhand des Schaubildes, ob es sich bei dem von Ihnen gefundenen Extrempunkt um ein Maximum oder Minimum handelt.

Begründen Sie anhand des Schaubildes, wo der Graph von f Wendestellen besitzt.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f in einem sinnvollen Intervall.

Um bei Bränden in Gebäuden den Schutz der dort arbeitenden Menschen zu erhöhen, werden von Sicherheitsbeauftragten oder von der Feuerwehr regelmäßig Räumungsübungen durchgeführt: Nachdem ein Probealarm ausgelöst wurde, müssen alle Personen zügig das Gebäude verlassen.

Der Sicherheitsbeauftragte einer kleinen Schule führt eine Räumungsübung durch, die nach 20 Minuten beendet sein soll. Im Gebäude befinden sich 250 Personen. Mit x wird die Zeit in Minuten seit dem Auslösen des Alarms bezeichnet. Die oben angegebene Funktion f gibt jetzt die Anzahl der Personen pro Minute an, die das Gebäude zum Zeitpunkt x verlassen.

d) Beschreiben Sie den Ablauf der Räumungsübung in den wesentlichen Eigenschaften, wie er sich anhand der Funktion f ergibt.

e) Weisen Sie nach, dass alle Funktionen F mit $F(x) = -(250 + 50x) \cdot e^{-0,2x} + c$ und mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen von f sind.

Die Funktion $F(x)$ soll jedem Zeitpunkt $x \geq 0$ die Anzahl der Personen zuordnen, die seit dem Auslösen des Alarms insgesamt das Gebäude verlassen haben. Bestimmen Sie dazu einen passenden Wert für c.

Berechnen Sie das Integral $\int_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Erläutern Sie, welche Bedeutung das Integral im Anwendungszusammenhang hat und beurteilen Sie den Erfolg der Räumungsübung.