AUFGABEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1) Rechne aus:

a) $\binom{6}{3}$

b) $4!$

c) $\frac{5!}{3!}$

d) $\binom{6}{0}$

e) $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1}$

f) $\binom{k}{0}$

2) Gegeben sei ein sechsseitiger Würfel, den wir dreimal nacheinander werfen.

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man nur gerade Zahlen (2, 4 oder 6) als Ergebnis?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau eine gerade Zahl unter den 3 Würfen?

3) Gegeben sei das folgende Glücksspiel:
Der Einsatz beträgt 2 €. Man wirft einen Würfel. Wenn man eine 1, 2 oder 3 erhält, so ist der Einsatz verloren. Wenn man eine 4 oder 5 erhält, so erhält man den Einsatz zurück. Wenn man eine 6 erhält, so werden 8 € zurückgezahlt (2 € Einsatz + 6 € Gewinn).

a) Bestimme den Gewinn bzw. Verlust, der auf lange Sicht für einen Spieler pro Spiel zu erwarten ist.

b) Wie müsste man die Summe, die man bei einer 6 zurück erhält, verändern, damit auf lange Sicht mit einem Gewinn von +1 € pro Spiel für einen Spieler zu rechnen ist?

4) Wir werfen eine manipulierte Münze 30-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten beträgt 65 %.

a) Gib einen Term an, mit dem man ausrechnen könnte, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau 2-mal Kopf erhält.

b) Gib einen Term an, mit dem man ausrechnen könnte, mit welcher Wahrscheinlichkeit man genau 6-mal Kopf erhält.

c) Gegeben sei der folgende Term:

$$\binom{30}{9} \cdot 0{,}65^{9} \cdot 0{,}35^{21}$$

Was könnte man mit diesem Term ausrechnen?

5) (Abitur Bayern 2017)

Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einen blauen, einen gelben und einen roten. Diese sind unterschiedlich groß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der blaue Sektor getroffen wird, beträgt p.

a) Interpretieren Sie den Term $(1-p)^7$ im Sachzusammenhang.

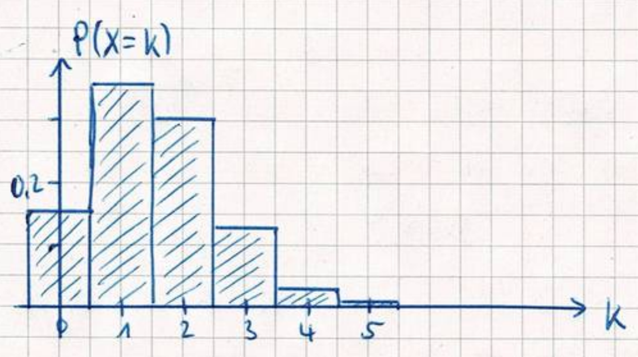
b) Das Glücksrad wird zehnmal gedreht. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass der blaue Sektor genau zweimal getroffen wird.

c) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Drehen der gelbe Sektor getroffen wird, beträgt 50 %. Felix hat 100 Drehungen des Glücksrads beobachtet und festgestellt, dass bei diesen der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wurde, deutlich geringer als 50 % war. Er folgert: „Der Anteil der Drehungen, bei denen der gelbe Sektor getroffen wird, muss also bei den nächsten 100 Drehungen deutlich größer als 50 % sein." Beurteilen Sie die Aussage von Felix.

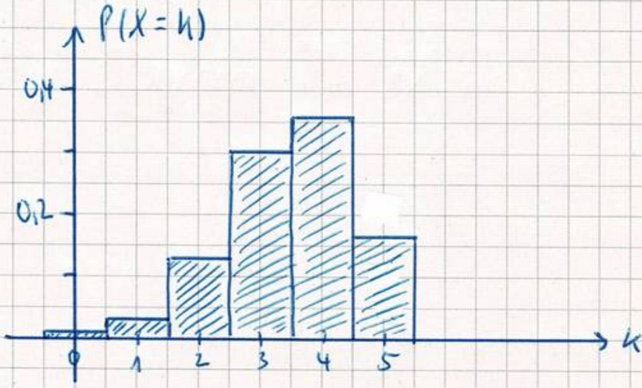
d) Das Glücksrad wird viermal gedreht und die Abfolge der Farben als Ergebnis notiert. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Ergebnisse, in denen die Farbe Blau nicht vorkommt.

6) Wir werfen eine manipulierte Münze 5-mal. Die Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf „Kopf" zu erhalten beträgt 70 %. Welches der unten dargestellten Histogramme gehört zu diesem Experiment?

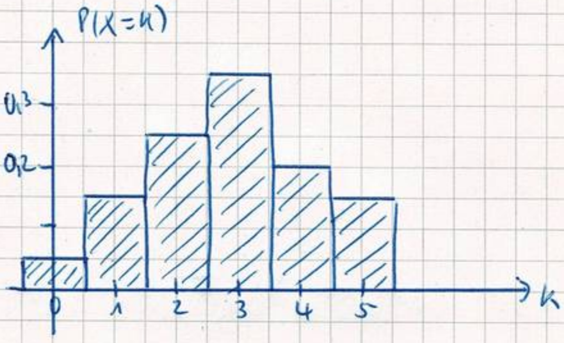
a)



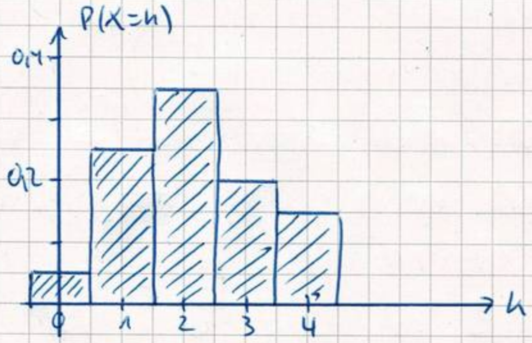
b)



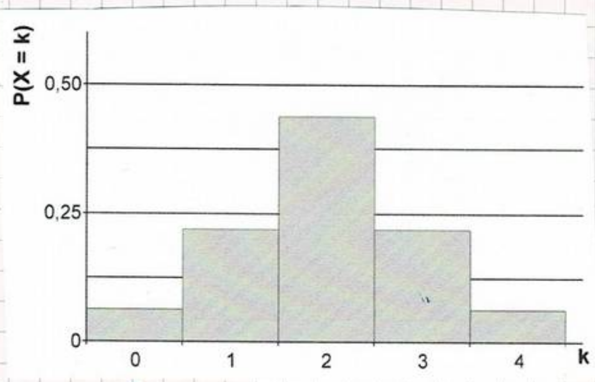
c)



d)



7) Warum kann das nachfolgende Histogramm nicht zu einer Binomialverteilung mit Erwartungswert 2 gehören?



(Vorbild: Abitur Bayern 2017)

8) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 82)

Ein Basketballspieler wirft 10 Freiwürfe.
Die Anzahl seiner Treffer wird mit k bezeichnet und durch die Zufallsgröße X beschrieben.
Die Zufallsgröße X wird als binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}8$ angenommen.
In der Abbildung 33 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

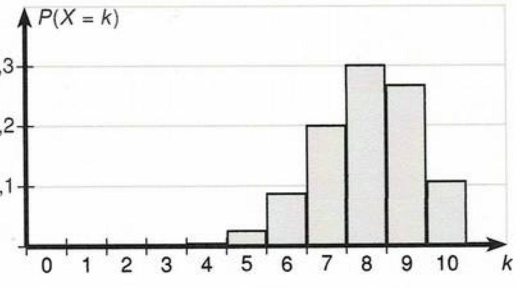


Abb. 33

a) **Ermitteln** Sie mithilfe der Abbildung 33 einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Basketballspieler mindestens 8-mal trifft.

b) In der Abbildung 33 sieht es so aus, als wäre $P(X = 2) = 0$.
Begründen Sie, dass dies nicht der Fall ist.

9) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 81)

Eine Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Erfolge in einem n-stufigen Bernoulli-Experiment mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p an. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Größe X ist in der unten stehenden Tabelle vollständig aufgelistet und in der nebenstehenden Abbildung 32 dargestellt.

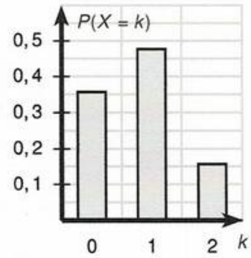


Abb. 32

k	$P(X = k)$
0	0,36
1	0,48
2	0,16

Bestimmen Sie n, die Erfolgswahrscheinlichkeit p und den Erwartungswert von X.

Die Werte sollen genau sein und keine Schätzwerte oder Näherungswerte.

10) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 84)

Die Abbildung 34 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und p.

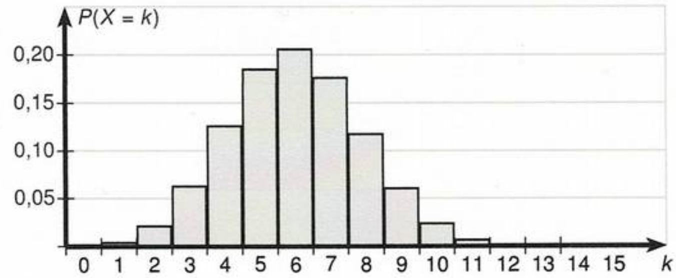


Abb. 34

a) Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung 34 die Wahrscheinlichkeit $P(5 \leq X \leq 7)$.

b) X hat den Erwartungswert 6 und die Varianz 3,6.
Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von n und p.

11) In einer Urne sind 6 Kugeln: Davon sind 4 rot und 2 blau. Wir ziehen 3 Kugeln ohne Zurücklegen nacheinander.

a) Wie viele verschiedene Ergebnisse sind möglich?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man nur rote Kugeln?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau zwei rote Kugeln?

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man nur blaue Kugeln?

AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) In einer Urne sind 10 Kugeln. Davon sind 6 rot und 4 grün. Wir ziehen 12-mal mit Zurücklegen.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau 6-mal eine rote Kugel?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man genau 7-mal eine grüne Kugel?

c) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Hilfe eines Histogramms dar. Wir betrachten das Ziehen einer roten Kugel als „Treffer".

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man höchstens 5-mal eine rote Kugel?

e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man weniger als 9-mal eine rote Kugel?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man mindestens 9-mal eine rote Kugel?

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht man zwischen 5-mal und 12-mal eine rote Kugel?

h) Gegeben sei der folgende Term:

$$\binom{12}{2} \cdot 0{,}6^{2} \cdot 0{,}4^{10}$$

Was kann man mit ihm ausrechnen?

i) Gegeben sei der Term $1 - 0{,}6^{12}$

Was kann man mit ihm ausrechnen?

2) Mehrwegflaschen (Abitur Bremen 2010)

Mehrwegflaschen haben eine sehr hohe Rücklaufquote. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine solche Flasche zurückgegeben wird, heißt Rückgabewahrscheinlichkeit. Bei Milchflaschen liegt sie bei 90%, bei Bierflaschen und Mineralwasserflaschen zwischen 96% und 98%.

a) Es werden zunächst Mehrweg-Mineralwasserflaschen betrachtet. Rechnen Sie im Folgenden mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit pro Flasche von $p_W = 0{,}97$.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 16 einzeln verkauften Flaschen

- genau 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- mindestens 15 Flaschen zurückgegeben werden.
- weniger als 14 Flaschen zurückgegeben werden.

Runden Sie Ihre Ergebnisse auf drei Nachkommastellen.

b) Jetzt betrachten wir Mehrweg-Milchflaschen mit einer Rückgabewahrscheinlichkeit von $p_M = 0{,}9$ pro Flasche.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10 einzeln verkauften Milchflaschen mindestens eine *nicht* zurückgegeben wird.

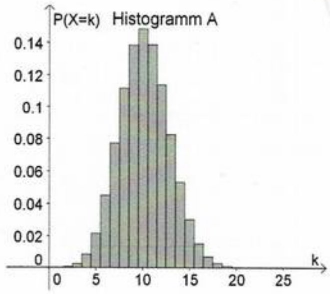
Ermitteln Sie, ab wie vielen verkauften Milchflaschen die Wahrscheinlichkeit, dass alle Flaschen zurückkommen, höchstens 5% beträgt und formulieren Sie einen Antwortsatz.

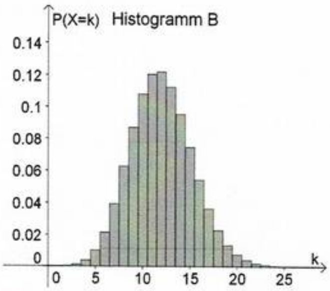
c) Ein kleiner Supermarkt verkauft pro Woche ca. 100 Flaschen Milch ($1\,l$ Mehrwegflaschen).
Berechnen Sie für 100 Flaschen den Erwartungswert für die nicht zurückgegebenen Flaschen.

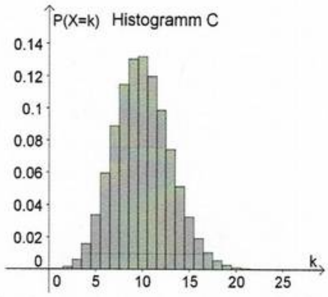
Hier sehen Sie die Histogramme von drei Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Entscheiden Sie, welches dieser Histogramme zu der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße

X: Anzahl der nicht zurückgegebenen Flaschen mit $n = 100;\ p = 0{,}1$ gehört.

Begründen Sie jeweils mit einem Argument, warum es die beiden anderen Diagramme nicht sein können.







d) Bei den Milch-Mehrwegflaschen handelt es sich um Literflaschen. Jede zurückgegebene Flasche wird wieder gefüllt und verkauft.

- Erklären Sie mit Hilfe eines Baumdiagramms, warum die Wahrscheinlichkeit, dass mit einer Flasche mindestens 5 Liter Milch verkauft werden, $0{,}9^4 = 65{,}61\%$ beträgt.
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich mit einer Flasche genau 5 Liter Milch verkaufen lassen.

Wir nehmen an, dass eine Flasche nach 6 Füllungen wegen möglicher Beschädigungen aussortiert wird.

- Bestimmen Sie unter dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 6 Liter Milch mit einer Flasche verkauft werden.
- Bestimmen Sie unter dieser Annahme den Erwartungswert für die Menge Milch, die mit einer Mehrwegflasche verkauft wird.

3) Studienwünsche (Abitur Bremen 2009)

Für die Abiturientinnen und Abiturienten des Jahres 1999 lag die Quote derjenigen, die fest geplant hatten ein Studium aufzunehmen, bei 65%. Diesen Prozentsatz nennt man „Brutto-Studierquote".

Nehmen Sie für die Aufgabenteile a) bis d) folgendes an:
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig befragte Person des Abiturjahrgangs 2009 zu denjenigen gehört, die studieren wollen, beträgt wie 10 Jahre zuvor $0{,}65$.

a) Erläutern Sie, warum man die Befragung von n zufällig ausgewählten Personen des Abiturjahrgangs 2009 nach ihrer Studierabsicht als binomialverteilten Zufallsversuch auffassen kann.

Geben Sie die zugehörige Zufallsgröße an.

b) Es werden 8 Personen des Abiturjahrgangs 2009 zufällig befragt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür an, dass von ihnen

- genau 8 studieren wollen.
- weniger als 3 studieren wollen.

Bestimmen Sie $P(3 \leq X \leq 7)$ und erläutern Sie die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang.

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass von 3 Personen des Abiturjahrgangs 2009 mindestens eine studieren will.

Ermitteln Sie eine allgemeine Berechnungsformel, die angibt, wie die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt wird, dass von n Personen des Abiturjahrgangs 2009 mindestens eine studieren will.

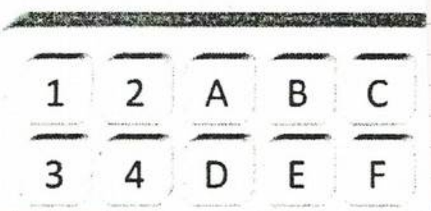
Bestimmen Sie die kleinste Anzahl an Personen des Abiturjahrgangs 2009, die zufällig ausgewählt und befragt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% oder mehr mindestens eine studierwillige Person unter ihnen ist.

d) Es werden 100 zufällig ausgewählte Personen des Abiturjahrgangs 2009 befragt. Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Personen, die studieren wollen.

Jede dieser 100 befragten Personen, die erklärt, studieren zu wollen, soll im Anschluss an die Befragung ein Informationspaket der Universität erhalten. Bestimmen Sie die Mindestanzahl der Informationspakete, die bereit gehalten werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90% jede studierwillige Person ein Informationspaket bekommt.

4) Affe und Tastatur (Abitur Baden-Württemberg 2018)

Ein Affe sitzt vor einer Tastatur, deren Tasten mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 sowie mit den Buchstaben A, B, C, D, E und F beschriftet sind (siehe Abbildung).
Zunächst wird angenommen, dass der Affe zufällig auf die Tasten tippt. Die Tastatureingaben werden aufgezeichnet.



a) Es werden die ersten fünf Tastaturanschläge des Affen betrachtet.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A: „Der Affe tippt nur auf Tasten mit Ziffern."
B: „Der Affe tippt höchstens dreimal eine Ziffer."
C: „Die vom Affen getippte Zeichenfolge enthält die Buchstaben A F F E direkt hintereinander."

b) Nun werden Versuchsreihen mit jeweils 20 Tastaturanschlägen durchgeführt.
Wie viele Buchstaben pro Versuchsreihe kann man dabei auf lange Sicht im Mittel erwarten?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Versuchsreihe die Anzahl der getippten Buchstabentasten um höchstens 20% von diesem erwarteten Wert abweicht.
Wie viele Zifferntasten müssten mindestens hinzugefügt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 15 Buchstabentasten in einer Versuchsreihe getippt werden, auf unter 1% fällt?

5) Tombola (Abitur Bremen 2011)

Die Bürgerpark-Tombola in Bremen gibt es seit über fünfzig Jahren. Während eines Jahres werden drei Monate lang in der Stadt Lose verkauft. Das Geld, das mit der Lotterie eingenommen wird, trägt wesentlich dazu bei, dass der Bürgerpark und der Stadtwald ohne die Verwendung von Steuergeldern gepflegt werden können.

a) Eine Erhebung der Bürgerpark-Tombola- Betreiber ergab:
Ca. 68% der Loskäuferinnen und -käufer kommen aus Bremen, etwa 19% aus dem Bremer Umland mit bis zu 30 km Entfernung, ca. 13% wohnen noch weiter von Bremen entfernt. 42% der Menschen, die ein Los kaufen, sind männlich.
Diese statistischen Daten sollen im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Merkmale in einem Zufallsversuch „Ziehen einer Person aus allen Loskäuferinnen und -käufern" aufgefasst werden. Außerdem wird angenommen, dass das zahlenmäßige Verhältnis der Geschlechter unter den Loskäuferinnen und -käufern in allen Regionen gleich ist.
Ermitteln Sie aus diesen Angaben die Wahrscheinlichkeit, dass ein Hauptgewinn an eine weibliche Person aus Bremen geht.

Laut Angaben der Betreiber gewinnt bei der Bürgerpark-Tombola jedes $4.$ Los.

b) Jemand kauft 6 Lose. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Gewinnlose unter den 6 gekauften Losen.

Begründen Sie, warum die Binomialverteilung eine geeignete Verteilung der Zufallsgröße ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse auf 4 Stellen genau:

- Genau zwei Lose sind Gewinnlose.
- Mindestens 4 Lose sind Nieten.

Ermitteln Sie, wie viele Lose eine Person kaufen muss, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens ein Gewinnlos hat.

c) Eine Person kauft während der Bürgerpark-Tombola 12 Lose.
Bestimmen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Gewinnlose unter den 12 gekauften Losen.

Die Person kauft diese 12 Lose jedoch nicht auf einmal, sondern dreimal je vier Lose. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie jedes Mal mindestens einen Gewinn erhält.

Die Bürgerpark-Tombola umfasst mehrere Lotterien hintereinander. Pro Lotterie werden 40000 Lose verkauft.

d) Jede Lotterie der Bürgerpark-Tombola hat einen unterschiedlichen Hauptgewinn (Autos, Traumreisen, Sparbücher, ...) und unterschiedliche Gewinne in den verschiedenen Gewinnklassen, aber in jeder Lotterie werden 80% der Los-Einnahmen von 40000 € als Gewinn wieder ausgeschüttet, bei einem Lospreis von 1 € beträgt der Erwartungswert für den Gewinn durch die Loseinnahmen also durchschnittlich 0,80 €.
Tatsächlich liegt der Erwartungswert für die Gewinnsumme pro Los durch Sonderveranstaltungen, bei denen Bremer Firmen zusätzliche Gewinne ins Spiel bringen, bzw. durch Firmenspenden sogar höher, nämlich zwischen 1,10 € und 1,20 €.

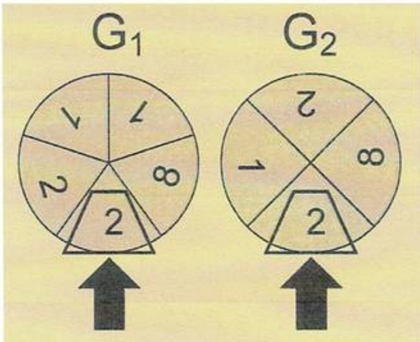
Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Erwartungswerts einen Bereich, in dem die Geld- bzw. Sachspenden der Bremer Firmen pro Lotterie liegen.

e) Ermitteln Sie für den folgenden Gewinnplan den fehlenden Wert in der Tabelle, wenn der Erwartungswert für den Gewinn pro Los 1,10 € beträgt. (Die Wahrscheinlichkeit, irgendetwas zu gewinnen, beträgt hier nicht genau, sondern nur ungefähr 0,25.)

Gewinnklasse	Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn	Wert des Gewinns
Hauptgewinn	$\frac{1}{40000}$	6000 €
1000 € bis 3000 €	0,0001	durchschnittlich 2000 €
100 € bis 500 €		durchschnittlich 250 €
Kleinstgewinne	0,248	durchschnittlich 1 €

6) Glücksspiel (Abitur Baden-Württemberg 2017)

Bei dem dargestellten Glücksspielautomaten sind zwei Glücksräder G_1 und G_2 mit fünf bzw. vier gleich großen Kreissektoren angebracht.
Bei jedem Spiel werden sie in Drehung versetzt und laufen dann unabhängig voneinander aus. Schließlich bleiben sie so stehen, dass von jedem Rad genau eine Zahl im Rahmen angezeigt wird.
Der Spieleinsatz beträgt 2€.
Sind die beiden angezeigten Zahlen gleich, so wird deren Summe in Euro ausgezahlt; andernfalls wird nichts ausgezahlt.
Der Hauptgewinn besteht also darin, dass 16€ ausgezahlt werden.



a) Ein Spieler spielt zehn Mal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: „Das Glücksrad G_1 zeigt genau fünf Mal die Zahl 1."
B: „Beim ersten Spiel beträgt die Summe der beiden angezeigten Zahlen 10."
C: „Der Spieler erhält mindestens einmal den Hauptgewinn."

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% soll in mindestens einem Spiel der Hauptgewinn erzielt werden.
Berechnen Sie, wie oft man dazu mindestens spielen muss.

c) Berechnen Sie, wie viel der Betreiber auf lange Sicht durchschnittlich pro Spiel verdient.