LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) $f(0) = 10 \cdot e^{0{,}2 \cdot 0} = 10 \cdot e^{0} = 10$

$\Rightarrow 10\ cm^2$

b) $f(4) = 10 \cdot e^{0{,}2 \cdot 4} = 10 \cdot e^{0{,}8} \approx 22{,}26$

$\Rightarrow \approx 22{,}26\ cm^2$

c) $24 = 10 \cdot e^{0{,}2x} \quad | :10$

$2{,}4 = e^{0{,}2x} \quad | \ln$

$\ln(2{,}4) = 0{,}2x \quad | :0{,}2$

$\frac{\ln(2{,}4)}{0{,}2} = x$

$4{,}3773 \approx x$

$4{,}3773\ h \approx 4\ h\ 23\ min$

$\Rightarrow$ 14:23 Uhr

d) $20 = 10 \cdot e^{0{,}2x} \quad | :10$

$2 = e^{0{,}2x} \quad | \ln$

$\ln(2) = 0{,}2x \quad | :0{,}2$

$\frac{\ln(2)}{0{,}2} = x$

$3{,}4657 \approx x$

$3{,}4657\ h \approx 3\ h\ 28\ min$

$\Rightarrow \approx 3\ h\ 28\ min$

e)
$$10 \cdot e^{0,2x} = 4 \cdot e^{0,7x} \quad | :4$$
$$2,5 \cdot e^{0,2x} = e^{0,7x} \quad | : e^{0,2x} \quad (e^{0,2x} \neq 0)$$
$$2,5 = \frac{e^{0,7x}}{e^{0,2x}}$$
$$2,5 = e^{0,7x-0,2x}$$
$$2,5 = e^{0,5x} \quad | \ln$$
$$\ln(2,5) = 0,5x \quad | \cdot 2$$
$$2 \cdot \ln(2,5) = x$$
$$1,8326 \approx x$$
$$1,8326\,h \approx 1h\ 50\ min$$
$\Rightarrow$ 11:50 Uhr

f) $f'(x) = 10 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2x} = 2e^{0,2x}$
$$f'(2) = 2 \cdot e^{0,2 \cdot 2} = 2 \cdot e^{0,4} \approx 2,9836$$
$\Rightarrow 2,9836\ cm^2/h$

g) gesucht: Max. der Geschwindigkeit $f'(x)$
$$f'(x) = 2 \cdot e^{0,2x}$$
$$f''(x) = 2 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2x} = 0,4\,e^{0,2x}$$
$$f'''(x) = 0,4 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2x} = 0,08\,e^{0,2x}$$

N.B.: $f''(x) = 0$
$$0,4 \cdot e^{0,2x} = 0 \quad \lightning$$
Ränder: $f'(0) = 2 \cdot e^{0,2 \cdot 0} = 2 \cdot e^0 = 2$
$$f'(5) = 2 \cdot e^{0,2 \cdot 5} = 2 \cdot e \approx 5,4366$$

$\Rightarrow$ höchste Geschw. um 15 Uhr mit $\hat{=}$ 5,44 cm^2/h

h) Größe um 15 Uhr:

$f(5) = 10 \cdot e^{0{,}2 \cdot 5} = 10 \cdot e \approx 27{,}18$

Entfernung von 12 cm^2:

Größe noch 15,18 cm^2

(I) $27{,}18 = 15{,}18 \cdot e^{0{,}2x} \quad | : 15{,}18$

$\frac{2718}{1518} = e^{0{,}2x} \quad | \ln$

$\ln\left(\frac{2718}{1518}\right) = 0{,}2x \quad | : 0{,}2$

$\frac{\ln\left(\frac{2718}{1518}\right)}{0{,}2} = x$

$2{,}9125 \approx x$

$2{,}9125\ h \approx 2\ h\ 55\ min$

$\Rightarrow$ 2 h 55 min

(II) $h(x) = 15{,}18 \cdot e^{0{,}2x}$, x: Zeit in h ab 15 Uhr

(III) $i(x) = 15{,}18 \cdot e^{0{,}2 \cdot (x-5)}$, x: Zeit in h ab 10 Uhr

Der Graph von i ist der um 5 LE nach rechts verschobene Graph von h.
Wenn man in einer Funktionsgleichung x durch x−5 ersetzt, so wird ihr Graph um 5 nach rechts verschoben.

2) a) $f(t) = 20.000 \cdot e^{0,5818t}$

$f(0) = 20.000$

$f(2) = 20.000 \cdot e^{0,5818 \cdot 2} \approx 64.028,75$

$f(4) = 20.000 \cdot e^{0,5818 \cdot 4} \approx 204.984,07$

$f(6) = 20.000 \cdot e^{0,5818 \cdot 6} \approx 656.243,74$

$f(8) = 20.000 \cdot e^{0,5818 \cdot 8} \approx 2.100.923,47$

Die Funktion weicht relativ stark von den echten Werten ab:

t	0	2	4	6	8
echt	20.000	100.000	205.000	250.000	277.500
$f(t)$	20.000	64.028,75	204.984,07	656.243,74	mehr als 2 Mio.

Nur bei $t=0$ und $t=4$ ergeben sich relativ genaue Werte.

Insbesondere wächst der y-Wert sehr stark an.

Laut Aufgabe gibt es aber insgesamt nur 280.000 Server.

$\Rightarrow$ f ist nicht geeignet

b) 1) $g(t) = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-kt}$

Es gilt: Bei $t=6$ ergibt sich eine Anzahl von 250.000

$$\Rightarrow 250.000 = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-k \cdot 6} \quad | -280.000$$

$$-30.000 = -260.000 \cdot e^{-k \cdot 6} \quad | : (-260.000)$$

$$\frac{3}{26} = e^{-k \cdot 6} \quad | \ln$$

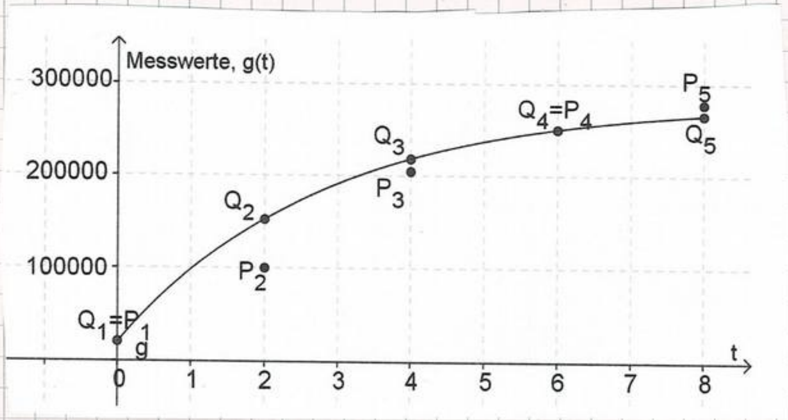
$$\ln\left(\frac{3}{26}\right) = -k \cdot 6 \quad | :(-6)$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{3}{26}\right)}{6} = k$$

$$0{,}3599 \approx k$$

(II) $g(4) = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-0{,}3599 \cdot 4} \approx 218.374$

(III)



c) (1) $140.000 = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-0{,}3599\, t} \quad | -280.000$

$$-140.000 = -260.000 \cdot e^{-0{,}3599\, t} \quad | :(-260.000)$$

$$\frac{7}{13} = e^{-0{,}3599\, t} \quad | \ln$$

$$\ln(7/13) = -0{,}3599\, t \quad | :(-0{,}3599)$$

$$-\frac{\ln(7/13)}{0{,}3599} = t$$

$$1{,}72 \approx t$$

$$1{,}72\,h \approx 1\,h\ 43\,min$$

$\Rightarrow$ 11:43 Uhr

(II) $\lim_{x \to \infty} g(t) = 280.000$

$\Rightarrow$ Auf lange Sicht werden alle 280.000 Server vom Virus erfasst.

d) (I) $g'(t) = -260.000 \cdot (-0{,}3599) \cdot e^{-0{,}3599\,t}$

$= 93574 \cdot e^{-0{,}3599\,t}$

(II) $g'(2) = 93574 \cdot e^{-0{,}3599 \cdot 2} \approx 45.556{,}47$

(III) $\lim_{x \to \infty} g'(t) = 0$

(IV) Um 12 Uhr beträgt die Geschwindigkeit der Virusverbreitung ca. 45.556,47 Server/h

Auf lange Sicht reduziert sich diese Geschwindigkeit immer weiter & nähert sich 0 an.

3a) Anfangswert: 82 Mio

Veränderung: $-0{,}6\%$ pro Jahr $\rightarrow$ Faktor: $1-0{,}006 = 0{,}994$

$\Rightarrow f(x) = 82 \cdot 0{,}994^{x}$

$= 82 \cdot e^{\ln(0{,}994) \cdot x}$

$= 82 \cdot e^{-0{,}006\, x}$

b) $f(10) = 82 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 10} = 82 \cdot e^{-0{,}06} = 77{,}22$

$\Rightarrow$ 77,22 Mio.

c) ① Um 10% verringert: von 82 auf $0{,}9 \cdot 82 = 73{,}8$

$$73{,}8 = 82 \cdot e^{-0{,}006x} \quad | :82$$

$$\frac{738}{820} = e^{-0{,}006x} \quad | \ln$$

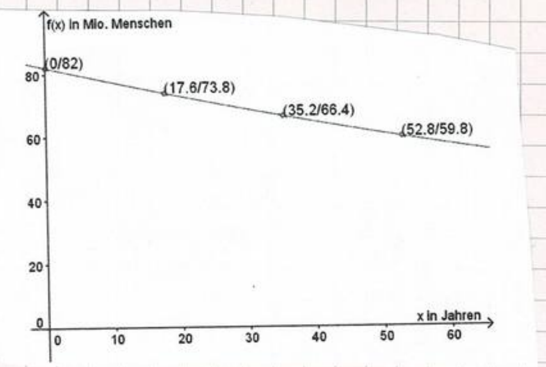
$$\ln\left(\frac{738}{820}\right) = -0{,}006x \quad | :(-0{,}006)$$

$$-\frac{\ln(738/820)}{0{,}006} = x$$

$$17{,}56 \approx x$$

$\Rightarrow$ 17,56 Jahre

②



d) ① $f'(x) = 82 \cdot (-0{,}006) \cdot e^{-0{,}006x}$
$= -0{,}492 \cdot e^{-0{,}006x}$

② $f'(0) = -0{,}492 \cdot e^{0} = -0{,}492$

Am Anfang nimmt die Bevölkerung mit 492.000 Personen/Jahr ab

(III) Innerhalb eines Jahres würde die Bev. um 0,492 Mio. abnehmen.
Da aber 0,492 Mio neu einwandern, bleibt die Bev. bei 82 Mio.
Im nächsten Jahr geht man wieder von 82 Mio Einwohnern aus, deren Zahl sich normalerweise um 0,492 Mio. verringern würde. Da aber wieder 0,492 Mio. einwandern, bleibt die Bev. konstant. usw.

e) (I) $g(0) = 82$

$$\Rightarrow 82 = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot 0} + 7{,}3$$
$$82 = a \cdot e^{0} + 7{,}3$$
$$82 = a + 7{,}3 \quad | -7{,}3$$
$$\underline{74{,}7 = a}$$

(II) $f(50) = 82 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 50} \approx 60{,}75$

$g(50) = 74{,}7 \cdot e^{-0{,}006 \cdot 50} + 7{,}3 \approx 62{,}64$

$\Rightarrow$ Nach Modell 1 ($f(x)$): Verlust von ca. 21 Mio
Nach " 2 ($g(x)$): " " " 19 "

(III) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{74{,}7 \cdot e^{-0{,}006 \cdot x}}_{\text{geht gegen } 0} + 7{,}3 = 7{,}3$

Auf lange Sicht würde die Bev. auf 7,3 Mio. schrumpfen. Da seriöse Vorhersagen nur über maximal 50 Jahre gemacht werden können, ist die Angabe aber vermutlich nicht realistisch.

f) $h(x) = a \cdot e^{-0{,}006x} + b$

b: 0,6 % von b sollen 100.000 sein

$\Rightarrow b \cdot 0{,}006 = 100.000 \quad | : 0{,}006$

$b = 16.666.666,\overline{6}$

$b = 16\frac{2}{3}$

$\Rightarrow h(x) = a \cdot e^{-0{,}006x} + 16\frac{2}{3}$

vgl. die Erläuterungen zu g(x) vor Aufgabe (e) bei der Aufgabenstellung

$h(0) = 82 \Rightarrow 82 = a \cdot e^0 + 16\frac{2}{3} \quad | - 16\frac{2}{3}$

$65\frac{1}{3} = a$

$\Rightarrow h(x) = 65\frac{1}{3} \cdot e^{-0{,}006x} + 16\frac{2}{3}$

4a) $f(0) = (0^2 - 5 \cdot 0 + 6) \cdot e^0 = 6$

$\Rightarrow 6\,°C$

b) $f(1) = (1^2 - 5 \cdot 1 + 6) \cdot e = 5{,}44\,°C$

$f(2) = (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) \cdot e^2 = 0°$

$\Rightarrow$ Unterschied: 5,44°C

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot e^x$

$f'(x) = (2x - 5) \cdot e^x + (x^2 - 5x + 6) \cdot e^x$

$= (x^2 - 3x + 1) \cdot e^x$

$f''(x) = (2x - 3) \cdot e^x + (x^2 - 3x + 1) \cdot e^x$

$= (x^2 - x - 2) \cdot e^x$

N.B.: $f'(x) = 0$

$(x^2 - 3x + 1) \cdot e^x = 0$

$x^2 - 3x + 1 = 0$ oder $e^x = 0$

$\lightning$

$x_1 = 0{,}38$

$x_2 = 2{,}62$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(0{,}38) = (0{,}38^2 - 0{,}38 - 2) \cdot e^{0{,}38}$

$\approx -3{,}27 < 0 \quad \Rightarrow HP$

$f''(2{,}62) = (2{,}62^2 - 2{,}62 - 2) \cdot e^{2{,}62}$

$\approx 30{,}83 > 0 \quad \Rightarrow TP$

y-Werte und Ränder

$f(0) = 6\ °C$

$f(0{,}38) = 6{,}21\ °C$

$f(2{,}62) = -3{,}24\ °C$

$f(4) = 109{,}196\ °C$

höchste Wert: 12 Uhr mit $\approx 109{,}2\ °C$

niedrigste ": 10:37 Uhr mit $-3{,}24\ °C$

d) gesucht: ES von f'

(f' gibt die Veränderungsrate an)

$f'''(x) = (2x - 1) \cdot e^x + (x^2 - x - 2) \cdot e^x$

$= (x^2 + x - 3) \cdot e^x$

N.B.: $f''(x) = 0$

$(x^2 - x - 2) \cdot e^x = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$ oder $e^x = 0$

$\lightning$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_1 = -1$ (außerhalb des Def.bereichs)

$x_2 = 2$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = (4+2-3)\,e^2 = 22{,}17 > 0 \Rightarrow$ TP von f'

Ränder + y-Werte:

$f'(0) = 1$

$f'(2) = -7{,}39$

$f'(4) = 272{,}99$

$\Rightarrow$ stärkste Abnahme 10 Uhr mit $-7{,}39$ °/h

" Zunahme 12 Uhr mit $272{,}99$ °C/h

e) $f(x) = 1$

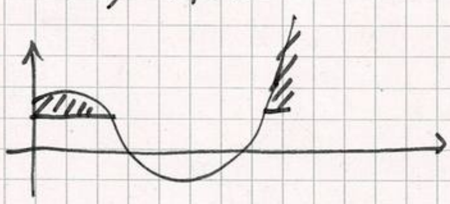
$(x^2 - 5x + 6) \cdot e^x = 1$

GTR...

$x_1 = -3{,}61$ (außerhalb des Def.bereichs)

$x_2 = 1{,}86$

$x_3 = 3{,}05$



$\Rightarrow$ von 8 Uhr bis 9:52 Uhr und
ab 11:03 Uhr oberhalb 1°C
und von 9:52 bis 11:03 unterhalb