LÖSUNGEN (hilfsmittelfreier Teil)

1a) $\log_2(8) = 3$, denn $2^3 = 8$

b) $\log_x(16) = 2 \Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Rightarrow x = 4$ (keine negativen Basen zugelassen $\rightarrow -4$ entfällt)

c) $\log_2(x) = 5 \Leftrightarrow 2^5 = x$

$\Rightarrow x = 32$

d) $\log_3(1) = x \Leftrightarrow 3^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

e) $2^x = 0{,}5 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = -1$

f) $\ln(e^5) = x \Leftrightarrow e^x = e^5$

$\Rightarrow x = 5$

g) $\ln(x) = 2 \Leftrightarrow e^2 = x$

$\Rightarrow x = e^2$

h) $e^x - 1 = 0 \quad | +1$

$e^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$

i) $e^x - \frac{1}{e} = 0$

$e^x = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow x = -1$

2a) $f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

b) $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 6e^{3x}$

$f''(x) = 6 \cdot 3 \cdot e^{3x} = 18e^{3x}$

c) $f(x) = 2e^{2x} + 3e^{4x}$

$f'(x) = 2 \cdot 2 \cdot e^{2x} + 3 \cdot 4 \cdot e^{4x}$

$= 4 \cdot e^{2x} + 12 \cdot e^{4x}$

$f''(x) = 4 \cdot 2 \cdot e^{2x} + 12 \cdot 4 \cdot e^{4x}$

$= 8 \cdot e^{2x} + 48 \cdot e^{4x}$

d) $f(x) = -3 \cdot e^{2x}$

$f'(x) = -3 \cdot 2 \cdot e^{2x} = -6 \cdot e^{2x}$

$f''(x) = -6 \cdot 2 \cdot e^{2x} = -12 \cdot e^{2x}$

e) $f(x) = -3 \cdot e^{-2x}$

$f'(x) = -3 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = 6e^{-2x}$

$f''(x) = 6 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = -12 \cdot e^{-2x}$

f) $f(x) = (x+7) \cdot e^{x}$

$f'(x) = 1 \cdot e^{x} + (x+7) \cdot e^{x} = (x+8) \cdot e^{x}$

$f''(x) = 1 \cdot e^{x} + (x+8) \cdot e^{x} = (x+9) \cdot e^{x}$

g) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{x}$

$f'(x) = (2x+2) \cdot e^{x} + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{x}$

$= (x^2 + 4x + 3) \cdot e^{x}$

$f''(x) = (2x+4) \cdot e^{x} + (x^2 + 4x + 3) \cdot e^{x}$

$= (x^2 + 6x + 7) \cdot e^{x}$

h) $f(x) = (x^3 + 2x) \cdot e^{x}$

$f'(x) = (3x^2 + 2) \cdot e^{x} + (x^3 + 2x) \cdot e^{x} = (x^3 + 3x^2 + 2x + 2) \cdot e$

$f''(x) = (3x^2 + 6x + 2) \cdot e^{x} + (x^3 + 3x^2 + 2x + 2) \cdot e^{x}$

$= (x^3 + 6x^2 + 8x + 4) \cdot e^{x}$

3) a) $f(x) = e^x$ hat keine Nullstellen

b) $f(x) = 3 \cdot e^{5x}$ hat keine Nullstellen

c) $(x+3) \cdot e^{2x} = 0$

$x+3 = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$

$\underline{x = -3} \qquad\qquad ↯$

d) $(x^2 - 9) \cdot e^x = 0$

$x^2 - 9 = 0 \quad \vee \quad e^x = 0$

$x^2 = 9 \qquad\qquad ↯$

$\underline{x_1 = 3}$

$\underline{x_2 = -3}$

e) $(x^2 - 4x + 4) \cdot e^{2x} = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \vee \quad e^{2x} = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{4-4} \qquad ↯$

$\underline{x = 2}$

4) 1. $f(x) = 2 \cdot e^x$

Es gilt $f(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow A(0|2)$ gehört zum Graphen
Und es gilt:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$\Rightarrow$ Diese Bedingungen erfüllt nur Graph (b)

② $g(x) = 2 \cdot e^{-3x}$

Es gilt: $g(0) = 2 \cdot e^{-3 \cdot 0} = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow A(0|2)$
gehört zum Graphen

Und es gilt:

$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

Diese Bedingungen erfüllt nur Graph (c)

5a) Achsensymmetrie:

$f(x) = f(-x)$

$(x^2+1) \cdot e^{x^2} = ((-x)^2+1) \cdot e^{(-x)^2}$

$(x^2+1) \cdot e^{x^2} = (x^2+1) \cdot e^{x^2}$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie zur y-Achse

b) Achsensymmetrie:

$f(x) = f(-x)$

$2x \cdot e^{-x} = 2(-x) \cdot e^{-(-x)}$

$2x \cdot e^{-x} = -2x \cdot e^{x}$ ↯

Punktsymmetrie:

$-f(x) = f(-x)$

$-(2x \cdot e^{-x}) = 2(-x) \cdot e^{-(-x)}$

$-2x \cdot e^{-x} = -2x \cdot e^{x}$ ↯

$\Rightarrow$ keine Standardsymmetrie

c) Achsensymmetrie:

$$f(x) = f(-x)$$
$$2x \cdot e^{x^2+1} = 2(-x) \cdot e^{(-x)^2+1}$$
$$2x \cdot e^{x^2+1} = -2x \cdot e^{x^2+1} \quad ↯$$

Punktsymmetrie:

$$-f(x) = f(-x)$$
$$-(2xe^{x^2+1}) = -2x \cdot e^{(-x)^2+1}$$
$$-2x \cdot e^{x^2+1} = -2x \cdot e^{x^2+1} \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung

6a) $A(0|5)$
$B(1|8)$

Wertetabelle:

x	0	1	...
y	5	8	...

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anfangswert}}}{5} \cdot a^x$$

Bestimmung von a: $\frac{8}{5} = a$

$\Rightarrow f(x) = 5 \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^x = 5 \cdot 1{,}6^x$

b) $f(x) = 5 \cdot e^{\ln(1{,}6) \cdot x}$

Man müsste $\ln(1{,}6)$ ausrechnen.

7a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 20$ (begrenztes exponentielles Wachstum $f(x) = c - b \cdot e^{kx}$ Grenzwert ist c)

b) $f(0) = 20 - 2 \cdot e^0 = 20 - 2 = 18$

$\Rightarrow A(0/18)$

c) $20 - 2 \cdot e^x = 0 \quad | + 2 \cdot e^x$

$20 = 2 \cdot e^x \quad | : 2$

$10 = e^x \quad | \ln$

$\ln(10) = x$

$\Rightarrow x = \ln(10)$

8) $F(x) = e^{2x}$

9 a) $e^{-x} - 1 = 0 \quad | + 1$

$e^{-x} = 1 \quad | \ln$

$-x = \ln(1)$

$-x = 0$

$x = 0$

b) $f(x) = e^{-x} - 1$

$f'(x) = -1 \cdot e^{-x} = -e^{-x}$

$f'(-1) = -e^{-(-1)} = -e^1 = -e$

$\Rightarrow t(x) = -e\,x + b$

$P(-1/f(-1))$ liegt auf f und t

$f(-1) = e^{-(-1)} - 1 = e^1 - 1 = e - 1$

$P(-1/e-1)$ liegt auf $t \Rightarrow t(-1) = e - 1$

$\Rightarrow -e \cdot (-1) + b = e - 1$

$e + b = e - 1 \quad | - e$

$b = -1$

$\Rightarrow t(x) = -ex - 1$

10) ① Extremstellen

f hat einen Hochpunkt bei $x=3$

denn: $f'(3)=0$

und Vorzeichenwechsel von + nach − bei f'

f hat einen Sattelpunkt bei $x=0$

denn: $f'(0)=0$

und kein Vorzeichenwechsel von f'

② Wendestellen

Die WS von f sind die ES von f'

$\Rightarrow$ f hat Wendestellen bei $x=0$ und $x=3$

11) $(2x^2-8)\cdot(2e^x-2)=0$

$2x^2-8=0 \quad \vee \quad 2e^x-2=0$

$2x^2=8 \quad |:2 \qquad 2e^x=2 \quad |:2$

$x^2=4 \qquad e^x=1$

$\underline{x_1=2} \qquad \underline{x_3=0}$

$\underline{x_2=-2}$

12 a) $f(x)=x^2\cdot e^x$

$f(0)=0^2\cdot e^0=0\cdot 1=0$

$\Rightarrow A(0/0)$ gehört zum Graphen

$f(-1)=(-1)^2\cdot e^{-1}=e^{-1}>0$

$\Rightarrow B(-1/f(-1))$ muss oberhalb der x-Achse liegen

Nur der Graph von Bild 1 erfüllt alle diese Bedingungen

b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

$g(x) = \frac{1}{x^2 \cdot e^x}$

① Es gilt: $f(0) = 0$

Für 0 gilt daher $g(0) = \frac{1}{0}$ ↯

Der Graph von g darf bei $x = 0$ keinen y-Wert haben

⇒ Das ist nur bei Bild 3 der Fall.

② $(x^2 + 2x) \cdot e^x = 0$

$x^2 + 2x = 0 \lor e^x = 0$ ↯

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -2$

Der Graph von f' muss NS bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ haben. Das ist nur bei Bild 4 der Fall.

③ Bild 2 bleibt für F(x) übrig

Ergebnis: Bild 1 f(x)

" 2 F(x)

" 3 g(x)

" 4 f'(x)