AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) Das Wachstum einer Bakterienkultur wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = 10 \cdot e^{0,2x}$.
Dabei beschreibt x die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und f(x) die Größe der Kultur in cm^2.

a) Bestimme die Größe der Kultur um 10 Uhr.

b) Bestimme die Größe der Kultur um 14 Uhr.

c) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Kultur eine Größe von 24 cm^2 erreicht.

d) Bestimme die Zeit, welche die Kultur für eine Verdopplung ihrer Größe braucht.

e) Eine zweite Kultur ist anfangs kleiner, wächst aber schneller. Ihr Wachstum wird beschrieben mit der Funktion $g(x) = 4 \cdot e^{0,7x}$.
Bestimme, den Zeitpunkt, zu dem die eine rechnerisch Kultur die andere überholt.

f) Berechne die Geschwindigkeit, mit der die erste Kultur um 12 Uhr wächst.

g) Wir betrachten die Zeit von 10 Uhr bis 15 Uhr. Berechne den Zeitpunkt, zu dem die 1. Kultur in diesem Zeitraum am schnellsten wächst.

h) Um 15 Uhr werden 12 cm^2 der ersten Kultur entfernt. Anschließend wächst sie mit ihrer normalen Geschwindigkeit wieder weiter.

(I) Berechne, wie lange die Kultur braucht, um ihre Verluste auszugleichen.

(II) Beschreibe das Wachstum der Kultur für die Zeit nach 15 Uhr mit einer Exponentialfunktion $h(x)$. Dabei soll x die Zeit in Stunden ab 15 Uhr und $h(x)$ die Größe in cm^2 angeben.

(III) Beschreibe das Wachstum nach 15 Uhr durch eine Exponentialfunktion $i(x)$. Dabei soll x die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und $i(x)$ die Größe in cm^2 sein.

2) (Bremen 2010)

Ausbreitung eines Internetvirus

Der *Code Red Worm* ist ein Internetvirus. Das Virus richtet nur auf zentralen Computern (Servern) einen Schaden an. Von einem Virus befallene Server sind nicht mehr einsatzfähig.
Der *Code Red Worm* hat am 13.07.2001 innerhalb einiger Stunden von insgesamt 280000 Servern viele befallen. Die Anzahl der befallenen Server wird vom CERT * über ein Meldesystem ausgezählt. Mit Hilfe der Daten werden mathematische Modelle entwickelt, um Vorhersagen über die Ausbreitung von ähnlichen Viren zu machen. Dazu sollen Sie in dieser Aufgabe mathematische Modelle überprüfen.

Die Tabelle gibt die Anzahl der am 13.07.2001 befallenen Server zu einer bestimmten Zeit an, die in Stunden ab 10 Uhr gemessen wird:

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden	0	2	4	6	8
Anzahl der infizierten Server (Messwerte)	20000	100000	205000	250000	277500

a) Eine Modellierung der Ausbreitung des Virus soll mit Hilfe der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 20000 \cdot e^{0{,}5818 \cdot t},\ t \geq 0$$

beschrieben werden. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $f(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

Entscheiden Sie auch mit Hilfe von Rechnungen, ob der Modellierungsansatz mit der Funktion f gut geeignet ist, um diesen Wachstumsprozess zu beschreiben und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Im Weiteren soll eine Modellierung der Virusausbreitung mit Hilfe der Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = 280000 - 260000 \cdot e^{-0,3599 \cdot t},\ t \geq 0$$

betrachtet werden. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $g(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

b) Zeigen Sie unter Angabe des Rechenwegs, dass mit Hilfe des Messwertes zur Zeit $t = 6$ die Wachstumskonstante k in der Funktionsgleichung $g(t) = 280000 - 260000 \cdot e^{-k \cdot t}$ zu $k \approx 0,3599$ bestimmt werden kann.

Berechnen Sie den fehlenden Wert $g(t)$ in der folgenden Tabelle. Runden Sie auf eine ganze Zahl.

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden, t	0	2	4	6	8
Anzahl infizierter Server, berechnet mit dem Funktionsterm $g(t)$	20000	153419		249997	265393

Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g für $0 \leq t \leq 8$ in ein Koordinatensystem unter Verwendung der fünf Punkte aus der zweiten Tabelle.

Zeichnen Sie die in der ersten Tabelle angegebenen fünf Messpunkte zum Vergleich ein.

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t, zu dem 140000 Server mit dem Virus infiziert sind.

Bestimmen Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners den Grenzwert von g für $t \to \infty$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang.

d) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion g unter Angabe des Rechenwegs. (Zur Kontrolle: $g'(t) = 93574 \cdot e^{-0,3599 \cdot t}$.)

Berechnen Sie $g'(2)$. Ermitteln Sie $\lim\limits_{t \to \infty} g'(t)$. Interpretieren Sie die Ergebnisse in Bezug auf die Ausbreitung der Viren.

3) (Bremen 2010)

Bevölkerungsentwicklung in Deutschland

Am Anfang des Jahres 2000 hatte Deutschland etwa 82 Millionen Einwohner.
Für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland ging eine UN-Studie aus dem Jahre 2000 davon aus, dass die Bevölkerung pro Jahr etwa um $0,6\%$ abnimmt. Diese Entwicklung der Bevölkerung soll durch eine Funktion f mit einer Gleichung des Typs $f(x) = a \cdot e^{kx},\ x \geq 0$ modelliert werden,
x ist die Zeit in Jahren nach dem $1.1.2000$, $f(x)$ die Bevölkerung in Millionen zum Zeitpunkt x.
Dabei bleiben Zu- und Abwanderungen unberücksichtigt.
Gehen Sie in den Aufgaben a) bis e) von unveränderten Bedingungen in den Folgejahren aus.

a) Begründen Sie rechnerisch, dass die Gleichung für $a = 82$ und $k \approx -0,006$ die Situation modelliert.

b) Berechnen Sie, welche Bevölkerungszahl am Anfang des Jahres 2010 zu erwarten ist.

c) Berechnen Sie den Zeitraum, in dem sich die Bevölkerungszahl jeweils um 10% verringert.
Skizzieren Sie den Graphen von f mit Hilfe von drei auf das Jahr 2000 folgenden Zeiträumen, in denen sich die Bevölkerungszahl jeweils um 10% verringert, in das beigefügte Koordinatensystem.
Runden Sie sowohl die Anzahl der Jahre als auch die Funktionswerte auf eine Nachkommastelle.

d) Bestimmen Sie unter Angabe des Rechenweges die Ableitungsfunktion f'. Berechnen und interpretieren Sie den Wert $f'(0)$.
Gehen Sie davon aus, dass ab 2000 jährlich eine Zuwanderung* von Menschen im Umfang des Wertes von $|f'(0)|$ in Mio. erfolgt und erläutern Sie, warum damit die Bevölkerungszahl in Deutschland in etwa konstant bleibt.

Im Folgenden wird von einer jährlichen Zuwanderung ab 2000 von $44\,000$ ** Menschen ausgegangen. Es wird angenommen, dass sich die zugewanderte Bevölkerung auch jährlich um $0{,}6\%$ verringert.
Als Modellfunktion für die Bevölkerungsentwicklung in Deutschland unter diesen Bedingungen dient die Funktion g mit folgender Gleichung

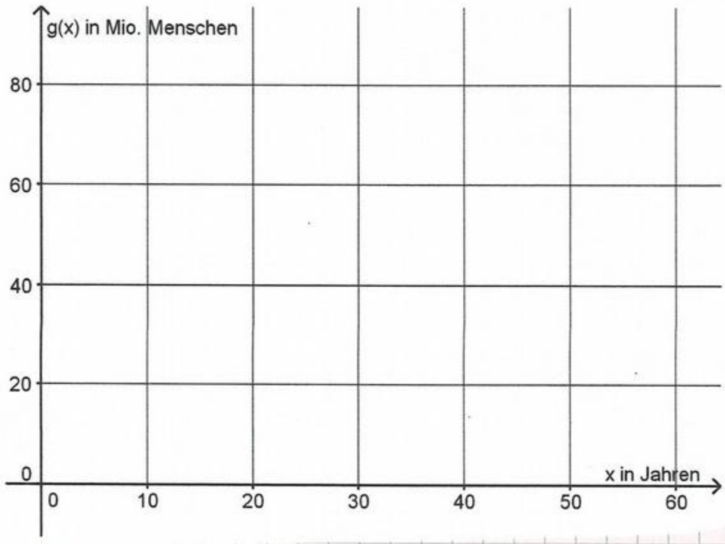
$$g(x) = a \cdot e^{-0{,}006 \cdot x} + 7{,}3,$$ x Zeit in Jahren nach dem $1.1.2000$, $g(x)$ in Millionen Menschen,

in der $0{,}6\%$ von $7{,}3$ Mio. den $44\,000$ Zuwanderern entsprechen.

e) Ermitteln Sie a mit Hilfe von $g(0) = 82$. (Lösung: $a = 74{,}7$)
Berechnen Sie die Werte für das Jahr 2050 mit den Gleichungen von f und g und vergleichen Sie diese mit dem Wert aus dem Jahr 2000 auf die Bevölkerungsentwicklung bezogen.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und schätzen Sie dessen Bedeutung für die Realität ein, wenn man davon ausgehen kann, dass seriöse Prognosen zu Bevölkerungsentwicklungen über höchstens 50 Jahre gemacht werden.

f) Stellen Sie analog zur Funktion g eine Funktionsgleichung für eine Funktion h auf, die statt einer Zuwanderung von $44\,000$ Menschen pro Jahr eine Zuwanderung von $100\,000$ Menschen pro Jahr berücksichtigt. Gehen Sie dabei davon aus, dass $0{,}6\%$ des Grenzwertes der Funktion h gerade der Zuwanderung von $100\,000$ entsprechen.

zu c)



4) Gegeben ist ein Objekt im Weltraum. Seine Temperatur wird beschrieben von der Funktion $f(x) = (x^2 - 5x + 6) \cdot e^x$, $0 \leq x \leq 4$. Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 8 Uhr und f(x) für die Temperatur in Grad Celsius. Die Funktion beschreibt die Temp. nur zwischen 8 Uhr und 12 Uhr.

a) Bestimme die Temperatur um 8 Uhr.

b) Bestimme den Temperaturunterschied zwischen 9 Uhr und 10 Uhr.

c) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, wo das Objekt im beobachteten Zeitraum die höchste bzw. niedrigste Temperatur hatte. Gib die jeweils höchste bzw. niedrigste Temperatur an.

d) Bestimme den Zeitpunkt, wo sich die Temperatur des Objekts am stärksten verändert hat.

e) Bestimme den Zeitraum, in dem die Temperatur unterhalb von 1 °C war.