LÖSUNGEN

1) 1. Wert $\quad 3$

2. Wert $\quad \dfrac{3+\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$

3. Wert $\quad \dfrac{17/6 + \frac{8}{17/6}}{2} = \dfrac{577}{204} = 2{,}82843\ldots$

4. Wert $\quad \dfrac{\frac{577}{204} + \frac{8}{577/204}}{2} = 2{,}828427125$

2) $2 < \sqrt{8} < 3$

$2{,}5^2 = 6{,}25$ (also zu wenig)

$2{,}5 < \sqrt{8} < 3$

$2{,}75^2 = 7{,}5625$ (also zu wenig)

$2{,}75 < \sqrt{8} < 3$

Bestimmung der Mitte: $\dfrac{2{,}75+3}{2} = 2{,}875$

$2{,}875^2 = 8{,}2656\ldots$ (also zu viel)

$2{,}75 < \sqrt{8} < 2{,}875$

Bestimmung der Mitte: $\dfrac{2{,}75+2{,}875}{2} = 2{,}8125$

$2{,}8125^2 = 7{,}91\ldots$ (also zu wenig)

$$2{,}8125 < \sqrt{8} < 2{,}875$$

3) natürliche Zahlen: $0; 1; 2; 3; 4; 5; \dots$

ganze Zahlen: $\dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots$

rationale Zahlen: $0; 1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2; -2; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \dots$

reelle Zahlen: alle Zahlen

irrationale Zahlen: reelle Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind (d.h.: nicht als Bruch darstellbar, unendlich viele Nachkommastellen & keine Periode)

daher:

natürliche Zahlen: $3; \sqrt{4} = 2; \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

ganze Zahlen: $3; -6; \sqrt{4} = 2; -2;$
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$

rationale Zahlen: $3; 2{,}5; -6; \sqrt{4} = 2; -1{,}2;$
$\frac{7}{9}; -2; \sqrt{2{,}25} = 1{,}5; \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$

irrationale Zahlen: $\sqrt{2}; \sqrt{3} + 1; \sqrt{6}$

reelle Zahlen: alle

Anmerkung: $\sqrt{3} + 1$ ist auch irrational.
$\sqrt{3}$ ist nämlich irrational (hat also unendlich viele Nachkommastellen & keine Periode). Dann ist auch $\sqrt{3} + 1$ irrational, da man nur vor dem Komma 1 addiert
$\sqrt{3} + 1 = 1{,}73205\dots + 1 = 2{,}73205\dots$

4) a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{14}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\cdot\sqrt{2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{8}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{3{,}5}$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{5\cdot 6\cdot 2} = \sqrt{60}$

f) $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8\cdot 2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \sqrt{5{,}\overline{3}}$

g) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ (kann nicht weiter vereinfacht werden)

h) $\frac{\sqrt{160}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{160}{5}} = \sqrt{32}$

i) $(\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$
$$= (1\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}$$
$$= 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{9}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$$
$$= \sqrt{9\cdot 3\cdot 2}$$
$$= \sqrt{54}$$

j) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5\cdot 2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{20}{10}} = \sqrt{2}$

k) $2\cdot\sqrt{7} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{4\cdot 7} = \sqrt{28}$

l) $\sqrt{6} + \sqrt{0} = \sqrt{6}$

5) a) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7 \cdot 6}}{6} = \frac{\sqrt{42}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8 \cdot 3}}{3} = \frac{\sqrt{24}}{3}$

c) $\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{100} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{300}}{3}$

d) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$

f) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}$

6) a) $\sqrt{x^{12}} = x^6$

b) $\sqrt{x^8 y^6} = x^4 y^3$

c) $\sqrt{x^2 y^4} = x y^2$

d) $\sqrt{x^{100}} = x^{50}$

e) $\frac{\sqrt{x^{10}}}{\sqrt{x^7}} = \sqrt{\frac{x^{10}}{x^7}} = \sqrt{x^3}$

f) $\frac{\sqrt{x \cdot y^2}}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{\frac{x \cdot y^2}{x^3}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{y}{x}$

g) $\sqrt{(x+3)^2} = x+3$

h) $\sqrt{x^{10} y^4} = x^5 y^2$

i) $\dfrac{\sqrt{x^3 y^5}}{x \cdot \sqrt{y^3}} = \dfrac{\sqrt{x^3 y^5}}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3}} = \dfrac{\sqrt{x^3 y^5}}{\sqrt{x^2 y^3}}$

$= \sqrt{\dfrac{x^3 y^5}{x^2 y^3}} = \sqrt{x y^2} = \sqrt{x} \cdot y$

j) $\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{x y^3} + \sqrt{x}\right) \underset{\text{Distri-butivgesetz}}{=} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x y^3} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

$= \sqrt{x \cdot x y^3} + \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2 y^3} + \sqrt{x^2}$

$= x\sqrt{y^3} + x$

7) a) $\sqrt{x} = 6 \quad | ()^2$

$x = 36$

b) $\sqrt{x+1} = 7 \quad | ()^2$

$x + 1 = 49 \quad | -1$

$x = 48$

c) $\sqrt{x} + 7 = 2 \quad | -7$

$\sqrt{x} = -5 \quad ↯$

d) $3 \cdot \sqrt{x} + 6 = 81 \quad | -6$

$3 \cdot \sqrt{x} = 75 \quad | :3$

$\sqrt{x} = 25 \quad | ()^2$

$x = 625$

e) $\sqrt{3x+2} + 4 = 10 \quad | -4$

$\sqrt{3x+2} = 6 \quad | ()^2$

$3x + 2 = 36 \quad | -2$

$3x = 34 \quad | :3$

$x = \frac{34}{3}$

f) $2 \cdot \sqrt{2x+3} + 4 = 8 \quad | -4$

$2 \cdot \sqrt{2x+3} = 4 \quad | :2$

$\sqrt{2x+3} = 2 \quad | ()^2$

$2x + 3 = 4 \quad | -3$

$2x = 1 \quad | :2$

$x = 0{,}5$

g) $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 6 = 8$

$1 \cdot \sqrt{x} + 2 \cdot \sqrt{x} + 6 = 8$

$3 \cdot \sqrt{x} + 6 = 8 \quad | -6$

$3 \cdot \sqrt{x} = 2 \quad | :3$

$\sqrt{x} = \frac{2}{3} \quad | ()^2$

$x = \frac{4}{9}$

h) $\sqrt{x} + 7 = 8 \quad | -7$

$\sqrt{x} = 1 \quad | ()^2$

$x = 1$

i) $\sqrt{2x} + 6 = 6 \quad | -6$

$\sqrt{2x} = 0 \quad | ()^2$

$2x = 0 \quad | :2$

$x = 0$

j) $\sqrt{x} + 9 = \sqrt{x} \quad | -\sqrt{x}$

$9 = 0$ ↯

nicht lösbar

k) $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+2} \quad | ()^2$

$2x + 6 = x + 2 \quad | -6$

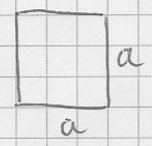
$2x = x - 4 \quad | -x$

$x = -4$

l) $\sqrt{x} = 0 \quad | ()^2$

$x = 0$

8) a)



$A = a^2$

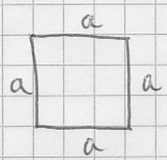
$A = 50\ cm^2$

$a^2 = 50 \quad | \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{50}$

$a \approx 7{,}07\ cm$

b)



$A = a^2$ $\qquad A = 60\ cm^2$

$U = 4a$

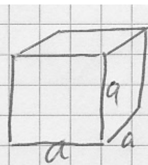
$a^2 = 60 \quad | \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{60}$

$a \approx 7{,}75\ cm$

$U = 4 \cdot a = 4 \cdot \sqrt{60} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{60} = \sqrt{16 \cdot 60} = \sqrt{960}$

$U \approx 30{,}98\ cm$

c) 

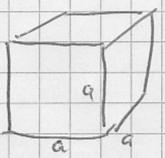
$V = a^3$

$V = 160\ cm^3$

$a^3 = 160 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$a = \sqrt[3]{160}$

$a \approx 5{,}43\ m$

d) 

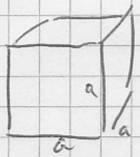
$O = 6 \cdot a^2$

$O = 800\ dm^2$

$6 \cdot a^2 = 800 \quad | : 6$

$a^2 = 133{,}\bar{3} \quad | \sqrt[2]{\ }$

$a \approx 11{,}55\ cm$

e) 

$O = 6 \cdot a^2$ $\qquad$ $V = a^3$

$O = 700\ cm^2$

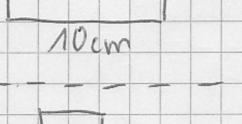
$6a^2 = 700 \quad | : 6$

$a^2 = 116{,}\bar{6} \quad | \sqrt{\ }$

$a = \sqrt{116{,}\bar{6}}$

$a \approx 10{,}80\ cm$

$V = a^3 = (\sqrt{116{,}\bar{6}})^3 \approx 1260{,}14\ cm^3$

f) 

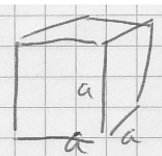
$A = 6\ cm \cdot 10\ cm$

$= 60\ cm^2$

$A = a^2$

$a^2 = 60 \quad | \sqrt{\ }$

$a \approx \sqrt{60} \approx 7{,}75\ cm$

g) 

$V = a^3$ $\quad$ $O = 6a^2$

$V = 1000\,cm^3$

$a^3 = 1000 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$a = 10\,cm$

$O = 6 \cdot a^2$

$O = 6 \cdot 10^2 = 6 \cdot 100 = 600\,cm^2$

9) a) Die Aussage ist falsch

$\sqrt{100} = 10$

10 ist eine rationale Zahl

b) Die Aussage ist falsch.

$1/3$ ist eine rationale Zahl

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}\overline{3}$

$\uparrow$ unendlich viele Nachkommastellen

c) Die Aussage ist wahr.

$\sqrt{6}$ ist eine irrationale Zahl, hat also unendlich viele Nachkommastellen ohne Periode.

d) Die Aussage ist wahr.

e) Die Aussage ist falsch.

$\sqrt{4} = 2$

$\uparrow$ rationale Zahl

f) Die Aussage ist falsch.
$\sqrt{3}$ ist eine irrationale Zahl. Sie kann nicht als Bruch dargestellt werden.

g) Die Aussage ist wahr.
Die reellen Zahlen umfassen alle Zahlen, die es gibt (bzw. alle Arten von Zahlen, die ihr je in der Schule sehen werdet)

h) Die Aussage ist falsch.
$\sqrt{x} = -1$ ↯
Das Ergebnis einer Quadratwurzel ist nie eine negative Zahl. Es macht also keinen Sinn, die Gleichung zu quadrieren.

i) Die Aussage ist wahr
$\sqrt{1} = 1$ und $\sqrt{0} = 0$

j) Die Aussage ist falsch
$\sqrt{4} = 2$
$\sqrt{0{,}81} = 0{,}9$
Es gibt Fälle, wo die Zahl größer ist als ihre Wurzel, und Fälle, wo die Zahl kleiner ist als ihre Wurzel

k) Die Aussage ist falsch
Die irrationalen Zahlen sind auch reelle Zahlen und können nicht als Bruch geschrieben werden.

l) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$

Die Aussage ist wahr.

m) Die Aussage ist falsch
$\sqrt{3} + \sqrt{5} \neq \sqrt{3+5}$

n) Die Aussage ist falsch.
Da $\sqrt{2}$ unendlich viele Nachkommastellen hat und nicht periodisch nicht, ist es unmöglich, dass der TR den absolut genauen Wert hat. Müsste sonst unendlich viele ~~ständig~~ Nachkommastellen im Speicher haben.

o) Die Aussage ist wahr

p) Die Aussage ist falsch
Die reellen Zahlen umfassen alle Zahlen, die es gibt (bzw. die ihr je in der Schule sehen werdet)

q) Die Aussage ist wahr.

r) Die Aussage ist wahr

$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$