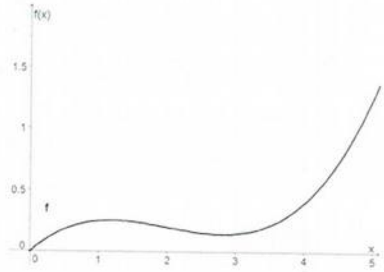
5) Bremen 2008

Spielfigur

Ein Metall verarbeitender Betrieb will eine Spielfigur in Serienproduktion herstellen. Diese Spielfigur wird in einer Fräsmaschine gefertigt, indem ein zylinderförmiges Stück Metall unter einem messerartigen Fräswerkzeug rotiert. Das Werkzeug bewegt sich dabei von links nach rechts mal höher, mal tiefer entlang einer in die Maschine eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt also für jeden Querschnitt der Spielfigur Ihren Radius an. Die entstehende waagerecht liegende Spielfigur wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende als Kopf der Figur oben und das rechte Ende als Fuß unten befindet.

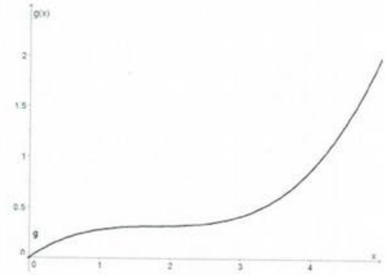


a) Am Kopf der $5cm$ hohen Spielfigur ist der Radius mit $0cm$ am kleinsten, während er am Fußende mit $1,25cm$ am größten ist. Am Übergang vom Kopf zum Hals der Spielfigur bei $x = 2cm$ beträgt der Radius $0,2cm$. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Kopfes zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am Übergang vom Kopf zum Hals durch $f''(2) = 0$ festgelegt.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

Die Maschine kann auch eine $5cm$ große Spielfiguren mit der Randfunktion g mit der Gleichung

$$g(x) = 0,05x^3 - 0,27x^2 + 0,5x$$

herstellen.



b) Berechnen Sie den Radius der Spielfigur (mit der Randfunktion g) sowohl an ihrem Fußpunkt als auch an der Stelle $x = 2$.

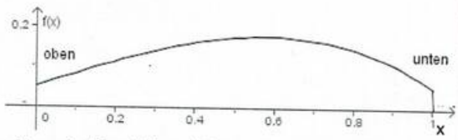
c) Zeigen Sie, dass der Übergang vom Kopf zum Hals, d.h. der Wendepunkt, bei $x_W = 1,8$ liegt und berechnen Sie den Radius an dieser Stelle.

6) Bremen 2008

Balkongeländer

Ein Zimmermannsbetrieb stellt Balkon- und Treppengeländer im Landhausstil her. Die senkrechten Pfosten des Geländers werden in einer Drechselmaschine hergestellt, indem ein Holzklotz unter einem Messer rotiert. Das Messer bewegt sich dabei entsprechend einer eingegebenen mathematischen Funktion. Diese Funktion gibt für jeden Querschnitt des Pfostens seinen Radius in Metern an. Der entstehende horizontale Holzpfosten wird später so aufgestellt, dass sich das linke Ende oben und das rechte unten befindet.

a) Ein $1m$ langer Pfosten soll an beiden Enden einen Radius von jeweils $0,05m$ besitzen. Auf der Höhe von 50 cm soll sein Radius $0,175\,m$ betragen. Die Funktion f, deren Graph das Messer in der Maschine durchläuft, soll eine ganz-rationale Funktion dritten Grades sein. Um eine bestimmte Form des Bauches zu erhalten, wird das Krümmungsverhalten am rechten Ende durch $f''(1) = -2$ festgelegt.



Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

b) Verwenden Sie ab jetzt die folgende Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x + 3$$

auch dann, wenn Sie in a) eine andere ermittelt haben.

Bestimmen Sie, ob f einen Sattelpunkt besitzt.

7) (Bremen 2010)

Das kleine Unternehmen „Pralinera“ produziert Pralinen.

Der „Pralinera“ entstehen unterschiedliche Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge der Pralinen bei fest stehender Lieferzeit. Je größer die Menge der produzierten Pralinen ist, desto höher fallen die Gesamtkosten aus, wobei der Gesamtkostenzuwachs mit jeder zusätzlich produzierten Einheit unterschiedlich ist. Bei größeren Produktionsmengen können die Gesamtkosten besonders stark steigen z.B. durch Überstunden, Nachtarbeit und zusätzlichen Maschinenbedarf.

a) Der „Pralinera“ entstehen bei der Produktion für einen Auftrag folgende Gesamtkosten: Bei einer Produktionsmenge von null kg belaufen sich die Gesamtkosten auf 100 €. Bei einer Produktionsmenge von 50 kg betragen die Gesamtkosten 1400 €. Bei einer Produktionsmenge von 100 kg betragen die Gesamtkosten 3000 €. Bei einer Produktionsmenge von 50 kg beträgt die lokale (momentane) Änderungsrate der Gesamtkosten 18 € pro kg.
Bestimmen Sie aus den Angaben eine ganzrationale Funktion K mit möglichst kleinem Grad, wobei x die Produktionsmenge (in kg) und $K(x)$ die Gesamtkosten (in €) in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x beschreiben und begründen Sie ihren Ansatz.

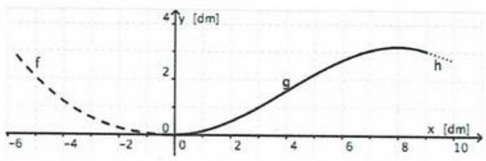
8) (Bremen 2011)

Balance

Stefan Heiliger ist ein bekannter Produktdesigner für Relax-Sessel, Sitzmöbel und Liegen. Er hat sowohl bei dem berühmten Designer Wilhelm Wagenfeld als auch im Automobil-Design bei Daimler–Benz gearbeitet. Formen, die er für seine Sessel benutzt, können an Sportwagen-Kurven oder an mathematische Kurven erinnern.

Einer seiner Sessel, den es in unterschiedlichen Ausführungen gibt, heißt „Balance“. Ein Modell sieht man im Bild oben.[1] Es besteht aus einem Metallgestell, einer Liegefläche und einem Kopfteil. Für die Aufgabenteile a) bis c) wird davon ausgegangen, dass sich der Sessel im Gleichgewichtszustand wie oben abgebildet befindet.

Die untere Linie des Metallgestells kann näherungsweise mit Hilfe von drei Funktionen f, g und h beschrieben werden. Man legt den Ursprung des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt des Gestells (siehe Skizze rechts). Die Achsen werden in Einheiten unterteilt, die einem Dezimeter entsprechen.



a) Das Gestell kann im Bereich $0 \le x \le 9$ durch eine Funktion g beschrieben werden. Diese hat in $P(0|0)$ eine waagerechte Tangente und für positive x-Werte ihren höchsten Punkt 8 dm weiter rechts mit der Höhe $3{,}2$ dm.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Funktion g.
Weisen Sie nach, dass mit Ihrer gefundenen Lösung an der gewünschten Stelle tatsächlich ein Hochpunkt liegt.
(Zur Kontrolle: $g(x) = -0{,}0125x^3 + 0{,}15x^2$)

b) Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}0073x^3 + 0{,}0478x^2$ beschreibt den linken Teil des Gestells im Bereich $-5{,}7 \leq x \leq 0$. Die beiden Funktionen f und g sollen knickfrei aneinander anschließen.
Zeigen Sie, dass dies zutrifft.

Auf dem Bild des Sessels sieht man, dass die linke Seite des Gestells linksgekrümmt ist.
Zeigen Sie, dass dies für den Graphen der Funktion f zutrifft.

c) Will man den Sessel verschiedenen Körperlängen anpassen, muss auch die Gestellform variieren. Im Folgenden wird nur der durch g beschriebene Teil des Gestells betrachtet.
Auf der Ebene der Funktionsgleichung besteht eine Möglichkeit, die Länge des Gestells zu verändern, darin, die Funktion g_k mit $g_k(x) = -0{,}0125x^3 + kx^2,\ \ 0 \leq x \leq x_H + 1$ zu betrachten, wobei $k > 0$ ein reeller Parameter und x_H der $x-$ Wert des Hochpunkts der Funktion g_k ist.

Zeigen Sie, dass jeder Funktionsgraph zu g_k in $T(0|0)$ einen Tiefpunkt hat.

Bestimmen Sie die Hochpunkte der Graphen von g_k. (Zur Kontrolle: $H\left(\frac{160k}{3}\middle|\frac{25600k^3}{27}\right)$)

Bestimmen Sie für k einen Bereich so, dass zwischen Hochpunkt und Tiefpunkt auf dem Boden eine Entfernung von mindestens 7 dm und höchstens 8 dm liegt.

Geben Sie die Ortskurve der Hochpunkte an.

Geben Sie für den Bereich $7 \leq x_H \leq 8$ die Werte für die kleinste und die größte Höhe der Hochpunkte an.