LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) Ich habe den Graphen von f mit dem Graph-Programm des GTR gezeichnet und mir anschließend die NS anzeigen lassen. Der GTR zeigt NS bei $x_1 \approx -4{,}43$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$. Da eine kubische Funktion nur maximal 3 NS haben kann, fehlt keine.

b) $f'(x) = 2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5$
$f''(x) = 4{,}2x + 4{,}8$

N.B.: $f'(x) = 0$
$2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5 = 0$
(GTR ...)
$x_1 = -3$
$x_2 \approx 0{,}71$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(-3) = -7{,}8 \Rightarrow$ HP bei $x = -3$
$f''(0{,}71) = 7{,}782 \Rightarrow$ TP bei $x = 0{,}71$

$\Rightarrow$ HP bei $x = -3$
TP bei $x = 0{,}71$

(Laut Aufgabe sind die Extremstellen gesucht, nach den y-Werten wird also nicht gesucht).

c) für $x < -3$ streng monoton wachsend
$-3 < x < 0{,}71$ " " fallend
$0{,}71 < x$ " " wachsend

d) Die Stellen, wo der Graph keine Krümmung hat, sind solche wo $f''(x)$ eine NS hat.
Ich habe den Graphen von $f''(x) = 4{,}2x + 4{,}8$ mit dem Graph-Programm des GTR gezeichnet und habe mir die NS anzeigen lassen. Sie lag bei $x = -1{,}14$. Da eine lineare Funktion nur eine NS hat, kann es keine weitere geben.
$\Rightarrow x \approx -1{,}14$

e) $f(0) = -6{,}2 \Rightarrow P(0|-6{,}2)$

$t(x) = ax + b$
$a = f'(0)$
$a = 2{,}1 \cdot 0^2 + 4{,}8 \cdot 0 - 4{,}5$
$a = -4{,}5$
$\Rightarrow t(x) = -4{,}5x + b$

$P(0|-6{,}2)$ liegt auf t $\Rightarrow t(0) = -6{,}2$
$-4{,}5 \cdot 0 + b = -6{,}2$
$b = -6{,}2$

$\Rightarrow t(x) = -4{,}5x - 6{,}2$

f) x mit Steigungswinkel $40° \Rightarrow f'(x) = \tan 40°$
$f'(x) = 0{,}84$

Wir suchen die x-Werte, für die $f'(x) = 0{,}84$.
Dazu lasse ich den Graphen von f' vom Graph-Programm des GTR zeichnen ($f'(x) = 2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5$).
Dann bestimme ich die x-Werte, indem ich beim Befehl X-CAL 0,84 für y eingebe.
Ich erhalte $x_1 \approx -3{,}1$ und $x_2 \approx 0{,}82$.
Da der Graph eine Parabel ist, kann es nur zwei x-Werte geben.

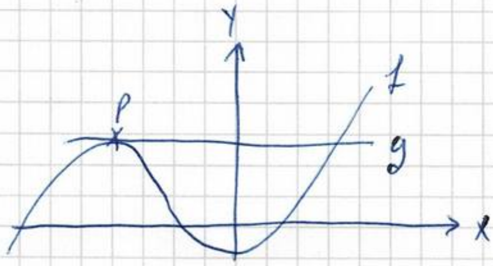
$\Rightarrow x_1 \approx 3{,}1$

$x_2 \approx 0{,}82$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h)



Die Tangente an f durch den Hochpunkt hat genau 2 Schnittpunkte. Ihre Steigung muss 0 sein, da es sich um eine ES handelt.

$f(-3) = 10$

$\Rightarrow g(x) = 10$

Probe: $f(x) = g(x)$

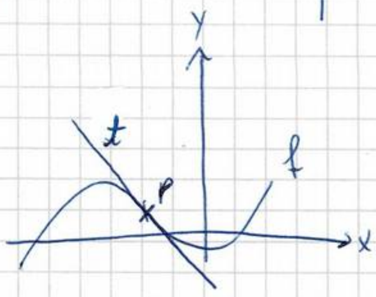
$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}1 = 10$

GTR ...

$x_1 = -3$

$x_2 = 2{,}57$

i)



Die Tangente durch den Wendepunkt („Wendetangente")
erfüllt die Bedingung.

N.B.: $f''(x) = 0$
$x \approx -1{,}14$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
$f'''(x) = 4{,}2$
$f'''(-1{,}14) \neq 0 \Rightarrow$ WP bei $x = -1{,}14$

$f(-1{,}14) \approx 1{,}03 \Rightarrow WP(-1{,}14/1{,}03)$

Tangente:
$f'(-1{,}14) \approx -7{,}24$
$\Rightarrow t(x) = -7{,}24\,x + b$

$WP(-1{,}14/1{,}03) \Rightarrow -7{,}24 \cdot (-1{,}14) + b = 1{,}03$
liegt auf t
$8{,}2536 + b = 1{,}03$
$b = -7{,}2236$
$b \approx -7{,}22$

$\Rightarrow t(x) = -7{,}24\,x - 7{,}22$

Probe: $f(x) = t(x)$
$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x = -7{,}24x - 7{,}22$
(GTR...)
$x \approx 1{,}14$

j) Die Spiegelung entspricht einer Multiplikation mit (-1). Also:
$g(x) = (-1) \cdot f(x)$
$= -0{,}7x^3 - 2{,}4x^2 + 4{,}5x + 6{,}2$

b) Die Spiegelung entspricht einer Ersetzung von x durch $-x$. Also:

$$h(x) = f(-x) = 0{,}7 \cdot (-x)^3 + 2{,}4 \cdot (-x)^2 - 4{,}5 \cdot (-x) - 6{,}2$$
$$= -0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 + 4{,}5x - 6{,}2$$

2 a) $f(2) = 20$
$\Rightarrow 20.000\ \ell/h$

b) Ich lasse den Graphen von f mit dem Graph-Programm des GTR zeichnen. Anschließend suche ich mit X-CAL die x-Werte, die zu den Punkten des Graphen mit $y = 10$ gehören. Der GTR zeigt an $x_1 \approx 0{,}43$, $x_2 \approx 3{,}18$ und $x_3 \approx 7{,}40$. Es kann nicht mehr als 3 solche Punkte geben. x_3 liegt außerhalb des Def.bereichs.

$\Rightarrow x_1 \approx 0{,}43 \quad \hat{=} \quad$ 10:26 Uhr
$x_2 \approx 3{,}18 \quad \hat{=} \quad$ 13:11 Uhr

c) N.B.: $f'(x) = 0$
$f'(x) = 3x^2 - 22x + 28$

$3x^2 - 22x + 28 = 0$
GTR...
$x_1 \approx 1{,}64$
$x_2 \approx 5{,}69$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
$f''(x) = 6x - 22$

$f''(1{,}64) = -12{,}16 < 0 \Rightarrow HP$

$f''(5{,}69) = 12{,}14 > 0 \Rightarrow TP$

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(1{,}64) = 20{,}75$

$f(5{,}69) = -12{,}60$

$f(7) = 0$

stärkster Zufluss: $x \approx 1{,}64 \mathrel{\hat{=}} 11{:}38$ Uhr
mit 20.750 l/h

stärkster Abfluss: $x = 5{,}69 \mathrel{\hat{=}} 15{:}41$ Uhr
mit -12.600 l/h

d) gesucht: Max. von f'

N.B.: $f''(x) = 0$

$6x - 22 = 0$

$x = \frac{11}{3}$

H.B.: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(x) = 6$

$f'''(\frac{11}{3}) = 6 \neq 0$

Ränder: $f'(0) = 28$

$f'(\frac{11}{3}) = -12{,}\overline{3}$

$f'(7) = 21$

stärkste Zunahme der Veränderungsrate:
um 10 Uhr mit 28.000 l/h²

e) $f(x) = 0$

$x^3 - 11x^2 + 28x = 0$

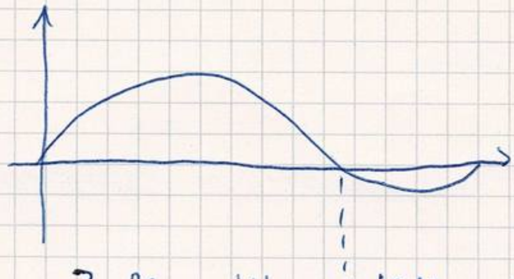
(GTR...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$x_3 = 7$

Also:



Zufluss 4h | Abfluss 3h
max. 20.750 l/h | max. 12.600 l/h

Innerhalb der ersten 4 h fließt Wasser zu.

⇒ am meisten Wasser um 14 Uhr

In den letzten 3 h fließt weniger Wasser ab als in den ersten 4 h zu (1 Stunde länger, Maximum höher, vgl. Graph-Programm GTR)

⇒ am wenigsten Wasser um 10 Uhr

f) Wenn 4h lang Wasser mit 20.750 l/h zufließen würden maximal $\underbrace{4 \cdot 20.750}_{83.000} < 84.000$ l zufließen.

g) ① $g(x) = x^3 - 11x^2 + 28x + 10$

Es fließen konstant zusätzlich 10.000 l/h zu.

② $g(x) = 0$

$x^3 - 11x^2 + 28x + 10 = 0$

GTR...

$x_1 \approx -0{,}32$

$x_2 = 5$

$x_3 \approx 6{,}31$

Probe: $g(6) = -2$ ✓

Antwort: Ja!
Zwischen $x_2 = 5$ (15 Uhr) und $x_3 \approx 6{,}31$ ($\approx$ 16:17 Uhr) fließt insgesamt Wasser ab.

3a) $E(x) = 25 \cdot x$ x: Anzahl an Kisten (zu je 100 Gurken)

$K(x) = \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{50}{3}x + 100$

$\Rightarrow G(x) = E(x) - K(x)$

$= 25x - \frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{50}{3}x - 100$

$= -\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{3}x - 100$

b) $G(x) = 0$

$-\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{3}x - 100 = 0$

(GTR...)

$x_1 \approx -26{,}06$

$x_2 = 10$

$x_3 = 46{,}06$

x_1 liegt außerhalb des Definitionsbereichs (da die Anzahl der Kisten positiv sein muss)

Probe: $G(0) = -100 < 0$

$G(20) = 100 > 0$

$G(50) = -100 < 0$

$\Rightarrow$ Der Gewinnbereich liegt zwischen 10 und 46,06 Kisten. (bzw. 10 und 46)

c) $G'(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{25}{3}$

$G''(x) = -\frac{1}{20}x + \frac{1}{2}$

N.B.: $G'(x) = 0$

$-\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{25}{3} = 0$

GTR...

$x_1 = -10{,}82$ (außerhalb des Def.bereichs)

$x_2 = 30{,}82$

H.B.: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$G''(30{,}82) = -1{,}041 < 0 \Rightarrow HP$

Ränder: $G(0) = -100$

$G(30{,}82) = 150{,}34$

nach rechts:

$G(x) < 0$ für $x > 46{,}06$ (siehe b)

⇒ Die gesuchte Menge liegt bei 30,82 Kisten pro Tag (bzw. bei 31, wenn nur ganze Kisten produziert werden) und bringt einen Gewinn von 150,34 € (bzw. 150,325 €) pro Tag

$G(30) = 150$

$G(31) = 150{,}325$

d) $G_{neu}(x) = E_{neu}(x) - K(x)$

$= 15x - \frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{50}{3}x - 100$

$= -\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{3}x - 100$

$G_{neu}(x) = 0$

$-\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{3}x - 100 = 0$

GTR...

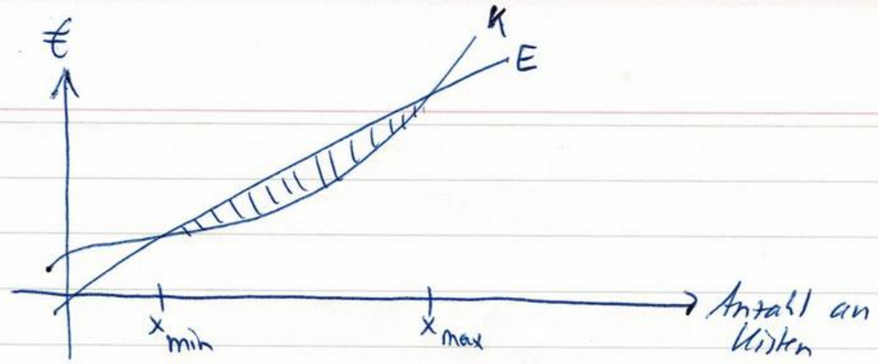
$x = -14{,}35$

Probe: $G(0) = -100$

Antwort: Nein!

Egal, wie viel er produzieren würde, er würde auf jeden Fall Verlust machen. Ab $x = -14{,}35$ befindet sich der Graph stets unterhalb der x-Achse.

e)



Wenn man K(x) und E(x) gleichzeitig in ein Koordinatensystem einzeichnen würde, so würde er Gewinn machen, wenn E über K liegt (schraffierter Bereich).
Die Funktion E(x) ist eine Ursprungsgerade der Form $a \cdot x = E(x)$ mit a als Preis für eine Kiste.
Der minimale Preis für den Bauern ergibt sich, wenn man a immer weiter verringert, so dass E(x) weniger steil verläuft. Am Ende erhält man eine Tangente an K(x), welche durch N(0/0) verläuft. Das dann erreichte a ist der minimal annehmbare Preis, bei dem bei einer bestimmten Produktionsmenge zumindest kein Verlust entsteht.

Hierbei ergibt sich:
$Preis_{Min} \approx 19{,}6243\,€$

f) Es wurden noch 30% von einst 500, also 150 verkauft. Das ergibt einen Erlös von $150 \cdot 0{,}5\,€ = 75\,€$.
Um diesen Erlös zu halten, müssten $70\,€ : 0{,}2\,€ = 375$ Gurken verkauft werden.
Eine solche Steigerung (mehr als Verdopplung) ist

während einer Epidemie unrealistisch.

4a) $f'(x) = 3x^2 - 24x + 32$
$f''(x) = 6x - 24$

N.B.: $f'(x) = 0$
$3x^2 - 24x + 32 = 0$
GTR...
$x_1 \approx 1{,}69$
$x_2 \approx 6{,}31$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$
$f''(1{,}69) = -13{,}86 < 0 \Rightarrow HP$
$f''(6{,}31) = 13{,}86 > 0 \Rightarrow TP$

Ränder: $f(0) = 0$
$f(1{,}69) = 24{,}63$
$f(6{,}31) = -24{,}63$
$f(9) = 45$

nördlichste Stelle: $P_1\,(9/45)$
südlichste " : $P_2\,(6{,}31/-24{,}63)$

b) $f(2) = 24$
$\Rightarrow$ Die Straße verläuft durch den Ort.

c) $f(x) = 24$
$x^3 - 12x^2 + 32x = 24$
GTR...
$x_1 \approx 1{,}39$
$x_2 \approx 2$
$x_3 \approx 8{,}6$ $\Rightarrow$ Es sind $8{,}6 - 2 = 6{,}6$ km.

d) $f''(x)=0$

$6x-24=0$

$x=4$

$f''(0)=-24<0$

$f''(5)=30-24=6>0$

Rechtskrümmung: $0\leq x<4$

Linkskrümmung: $4<x\leq 7$

5a) $f(x)=0$

$\frac{1}{6750}x^4-\frac{1}{75}x^2-4{,}5=0$

GTR...

$x_1=-15$

$x_2=15$

$\Rightarrow$ Länge $=30$ m

b) gesucht: Minimum

$f'(x)=\frac{2}{3375}x^3-\frac{2}{75}x$

$f''(x)=\frac{2}{1125}x^2-\frac{2}{75}$

N.B.: $f'(x)=0$

$\frac{2}{3375}x^3-\frac{2}{75}x=0$

GTR...

$x_1\approx-6{,}71$

$x_2=0$

$x_3\approx 6{,}71$

H.B.: $f'(x)=0 \wedge f''(x)\neq 0$

$f''(-6{,}71)=0{,}053...>0 \Rightarrow$ TP

$f''(0)=-\frac{2}{75}<0 \Rightarrow$ HP

$f''(6{,}71)=0{,}053...>0 \Rightarrow$ TP

Ränder: $f(-15)=0$

$f(-6{,}71)=-4{,}8$

$f(6{,}71)=-4{,}8$

$f(15)=0$

Die Wasserlinie befindet sich 1 m unter der x-Achse

$\Rightarrow$ Tiefgang: 3,8 m

c) ① $f(13) = -2{,}522 \Rightarrow P(13 \mid -2{,}522)$

$f'(13) \approx 0{,}96$

$\Rightarrow t(x) = 0{,}96x + b$

$P(13 \mid -2{,}522)$ liegt auf t $\Rightarrow$ $t(13) = -2{,}522$

$0{,}96 \cdot 13 + b = -2{,}522$

$12{,}48 + b = -2{,}522$

$b = -15{,}002 \approx -15$

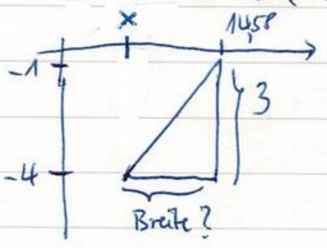
$\Rightarrow t(x) = 0{,}96x - 15$

② $0{,}96x - 15 = -1$

$0{,}96x = 14$

$x \approx 14{,}58$

$\Rightarrow S(14{,}58 / -1)$



Breite:

$0{,}96x - 15 = -4$

$0{,}96x = 11$

$x \approx 11{,}46$

$14{,}58 - 11{,}46 = 3{,}12$

$A = \frac{3 \cdot 3{,}12}{2} = \underline{4{,}68 \text{ m}^2}$

d) Länge entlang der Wasserlinie:

$f(x) = -1$

$\frac{1}{6750}x^4 - \frac{1}{75}x^2 - 4{,}5 = -1$

GTR...

$x_1 = -14{,}32$

$x_2 = 14{,}32$

Länge $= 2 \cdot 14{,}32 = 28{,}64\ m$

$V_E = 4{,}5 \cdot \sqrt{28{,}64}$

$\approx 24{,}08\ km/h$

500 Seemeilen $= 500 \cdot 1{,}852\ km$

$= 926\ km$

$\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = $ Geschwindigkeit

$\frac{926\ km}{t} = 24{,}08\ km/h$

$926 = 24{,}08 \cdot t$

$\frac{926}{24{,}08} = t$

$38{,}455 \approx t$

Es sind $\approx 38\ h\ 27\ Min$

6a) Die Funktion ist symmetrisch zur y-Achse (gerader Exponent) und steigt von $x=0$ aus nach rechts und links an. Die Tiefe in der Mitte ergibt sich also aus den bei $x=-5$ und $x=5$ erreichten Funktionswerten. Dazu lasse ich den Graphen mit dem Graph-Programm des GTR zeichnen. Dann bestimme ich mit Y-CALC das zu $P(5|y)$ gehörende y. Das Ergebnis ist 5.

$\Rightarrow$ Tiefe: 5 m

b) Ich zeichne den Graphen mit dem Graph-Programm des GTR. Dann bestimme ich mit X-CALC das zu $P(x|3)$ gehörende x. Ich erhalte $-4{,}4$ und $4{,}4$

$\Rightarrow$ Breite = 8,8 m

c) Steigung unter $2{,}86°$ bei $x \rightarrow \tan(-2{,}86) < f'(x) < \tan(2{,}86)$

$$-0{,}05 < f'(x) < 0{,}05$$

$$f'(x) = \frac{4}{125}x^3$$

Ich lasse mit dem Graph-Programm des GTR $f'(x)$ zeichnen. Dann bestimme ich mit X-CALC die zu $P(x|0{,}05)$ gehörenden x und die zu $P(x|-0{,}05)$ gehörenden x.

Ich erhalte: $1{,}16$ (zu $0{,}05$)

$-1{,}16$ (zu $-0{,}05$)

Probe: $f'(-2) = -0{,}256 \Rightarrow \alpha = -14{,}36°$

$f'(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0°$

$f'(2) = 0{,}256 \Rightarrow \alpha = 14{,}36°$

$\Rightarrow \quad -1{,}16 < x < 1{,}16$

d) $f(4) = 2{,}048$

$f(-4) = 2{,}048$

Bestimmung der Normalen:

$f'(4) = 2{,}048$

$f'(-4) = -2{,}048$

zu -4:

$n_1(x) = -\frac{1}{2{,}048}x + b$

$P_1(4|2{,}048)$ auf $n_1 \Rightarrow$

$-\frac{1}{2{,}048} \cdot 4 + b = 2{,}048$

$b = 2{,}048 + \frac{4}{2{,}048}$

$b = 4$

$\Rightarrow n_1(x) = -\frac{1}{2{,}048}x + 4$

$\approx -0{,}488x + 4$

zu 4:

$n_2(x) = \frac{1}{2{,}048}x + b$

$P(-4|2{,}048)$ auf $n_2 \Rightarrow$

$\frac{1}{2{,}048} \cdot (-4) + b = 2{,}048$

$b = 2{,}048 + \frac{4}{2{,}048}$

$b = 4$

$\Rightarrow n_2(x) = \frac{1}{2{,}048}x + 4$

$\approx 0{,}488x + 4$

Die Plattform befindet sich auf der x-Achse
$\Rightarrow$ NS gesucht

$-0{,}488x + 4 = 0$ $\qquad$ $0{,}488x + 4 = 0$

$-0{,}488x = -4$ $\qquad$ $0{,}488x = -4$

$x = 8{,}20$ $\qquad$ $x = -8{,}20$

$\Rightarrow$ Abstand $= 2 \cdot 8{,}2 = 16{,}4$ m