LÖSUNGEN (HILFSMITTELFREIER TEIL)

1) a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+8}$

$x = 1 \pm \sqrt{9}$

$x = 1 \pm 3$

$x_1 = -2$

$x_2 = 4$

b) $3x^2 + 3x - 18 = 0 \quad | :3$

$x^2 + x - 6 = 0$

$x = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$

$x = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$x = -0{,}5 \pm 2{,}5$

$x_1 = -3$

$x_2 = 2$

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \qquad | x^2 = z$

$z^2 - 13z + 36 = 0$

$z = 6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 36}$

$z = 6{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$z = 6{,}5 \pm 2{,}5$

$z_1 = 4 \qquad z_2 = 9 \quad | z = x^2$

$x^2 = 4 \qquad x^2 = 9 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = 2 \qquad x_3 = 3$

$x_2 = -2 \qquad x_4 = -3$

d) $x^3 + 20x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x + 20) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x + 20 = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = -20$

e) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0 \quad | \, x^3 = z$

$z^2 - 4z + 3 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$

$z = 2 \pm \sqrt{1}$

$z = 2 \pm 1$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 3 \quad | \, z = x^3$

$x^3 = 1 \qquad x^3 = 3 \quad | \sqrt[3]{}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = \sqrt[3]{3}$

f) $(x^2 - 4) \cdot (x + 2) = 0$

$x^2 - 4 = 0$ oder $x + 2 = 0$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{} \qquad x = -2$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$ (mit algebraischer Vielfachheit 2)

g) $x^5 - 3x^3 - 4x = 0$

$x \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad | \, x^2 = z$

$z^2 - 3z - 4 = 0$

$z = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 4}$

$z = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$z = 1{,}5 \pm 2{,}5$

$z_1 = -1$ $\qquad$ $z_2 = 4 \quad | z = x^2$

$x^2 = -1$ ↯ $\qquad$ $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

Lösungen: $x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

h) $\frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} - 1 = 0 \quad | \cdot x^4$

$6 + x^2 - x^4 = 0$

$-x^4 + x^2 + 6 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$x^4 - x^2 - 6 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - z - 6 = 0$

$z = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$

$z = 0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$

$z = 0{,}5 \pm 2{,}5$

$z_1 = -2$ $\qquad$ $z_2 = 3 \quad | z = x^2$

$x^2 = -2$ ↯ $\qquad$ $x^2 = 3$

$x_1 = \sqrt{3}$

$x_2 = -\sqrt{3}$

Lösungen: $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = -\sqrt{3}$

i) $x^3 + 27 = 0$

$x^3 = -27 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x = -3$

2a) geratene NS: $x_1 = 1$

(denn $1^3 + 3 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 5 = 0$)

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 3x^2 - 9x + 5) : (x-1) = x^2 + 4x - 5 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad 4x^2 - 9x \\
\quad -(4x^2 - 4x) \\
\hline
\quad\quad -5x + 5 \\
\quad\quad -(-5x + 5) \\
\hline
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

restliche NS:

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$x = -2 \pm \sqrt{4+5}$$
$$x = -2 \pm \sqrt{9}$$
$$x = -2 \pm 3$$
$$x_2 = -5$$
$$x_3 = 1$$

Lösung: $x_1 = 1$ (mit algebr. Vielfachheit 2)
$x_2 = -5$

b) geratene NS: $x_1 = 1$

(denn $1^3 + 1^2 - 10 \cdot 1 + 8 = 0$)

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 - 10x + 8) : (x-1) = x^2 + 2x - 8 \\
-(x^3 - x^2) \\
\hline
\quad 2x^2 - 10x \\
\quad -(2x^2 - 2x) \\
\hline
\quad\quad -8x + 8 \\
\quad\quad -(-8x + 8) \\
\hline
\quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

restliche NS:

$$x^2+2x-8=0$$
$$x=-1\pm\sqrt{1+8}$$
$$x=-1\pm 3$$
$$x_2=-4$$
$$x_3=2$$

Lösung: $x_1=1$; $x_2=-4$; $x_3=2$

3a) $|x+7|\leq 3$

Fall 1:

$$x+7\leq 3$$
$$x\leq -4$$

Fall 2:

$$x+7\geq -3$$
$$x\geq -10$$

Lösung: $-10\leq x\leq -4$

b) $4\cdot|2x+3|=8 \quad |:4$

$$|2x+3|=2$$

Fall 1:

$$2x+3=2 \quad |-3$$
$$2x=-1 \quad |:2$$
$$x=-0{,}5$$

Fall 2:

$$2x+3=-2 \quad |-3$$
$$2x=-5 \quad |:2$$
$$x=-2{,}5$$

Lösung: $x_1=-0{,}5$
$x_2=-2{,}5$

c) $(x+1)^2\leq 9 \quad |\sqrt{\ }$

$$x+1\leq 3 \quad |-1$$
$$x\leq 2$$

d) $x + |x-1| = 3$

Fall 1: $x-1 \geq 0$

$x + x - 1 = 3$

$2x - 1 = 3 \quad |+1$

$2x = 4$

$x = 2$

Fall 2: $x-1 \leq 0$

Der Betrag dreht das Vorzeichen herum

$x + (-x+1) = 3$

$x - x + 1 = 3$

$1 = 3$ ↯

Lösung: $x = 2$

e) $2 + |x+3| < 3 \quad |-2$

$|x+3| < 1$

Fall 1:

$x + 3 < 1$

$x < -2$

Fall 2:

$x + 3 > -1$

$x > -4$

Lösung: $-4 < x < -2$

4) symmetrisch zur y-Achse: f_1, f_4

symmetrisch zum Ursprung: f_2

5) $f(5) = 0 \Rightarrow 5^2 + a \cdot 5 = 0$

$25 + 5a = 0$

$5a = -25$

$a = -5$

6)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} \\ 3 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5\cdot \mathrm{III} + \mathrm{II} \\ \mathrm{II} - \mathrm{IV} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vertauschen der 3. & 4. Spalte

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -3c = -3$
$c = 1$

$\Rightarrow d + 9 = 12$
$d = 3$

$\Rightarrow 5b - 12 - 1 = -3$
$b = 2$

$\Rightarrow a + 4 - 3 + 1 = 3$
$a = 1$

7) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \\ 1 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot \mathrm{II} - 3\cdot \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -44 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -11c = -44$
$c = 4$

$\Rightarrow 3b - 4 = 2$
$3b = 6$
$b = 2$

$\Rightarrow a + 2 + 4 = 7$
$a = 1$

8) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 17 \end{array}\right) 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -5 \end{array}\right)$

$\Rightarrow -b = -5$
$b = 5$

$\Rightarrow a + 5 = 6$
$a = 1$

9) Wir haben ein nichtlineares System. Daher können wir das Gauß-Verfahren nicht verwenden.

$\mathrm{I}.\ a^2 + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a^2$
$\mathrm{II}.\ 2a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 2a$

$\Rightarrow 10 - a^2 = 7 - 2a$
$-a^2 + 2a + 3 = 0$
$a^2 - 2a - 3 = 0$
$a = 1 \pm \sqrt{1+3}$
$a = 1 \pm \sqrt{4}$
$a = 1 \pm 2$
$a_1 = -1$
$a_2 = 3$

Fall 1: $a_1 = -1$

$b = 7 - 2 \cdot (-1)$
$= 7 + 2$
$= 9$

Fall 2: $a_2 = 3$

$b = 7 - 2 \cdot 3$
$= 7 - 6$
$= 1$

Lösung: $a_1 = -1$, $b_1 = 9$ $\quad a_2 = 3$, $b_2 = 1$

10) $f(x) = (x+1)\cdot(x+2)(x+3)$
$= (x^2 + x + 2x + 2)\cdot(x+3)$
$= (x^2 + 3x + 2)\cdot(x+3)$
$= x^3 + 3x^2 + 2x + 3x^2 + 9x + 6$
$= x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

Wenn man die NS von $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ sucht, so ergibt sich

$x+1=0$ oder $x+2=0$ oder $x+3=0$
$x_1 = -1$ $x_2 = -2$ $x_3 = -3$,

also drei verschiedene NS

11) $f(x) = (x+1)\cdot\underbrace{(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)}$
$= (x+1)\cdot(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$
$= x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
$= x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

Diese Funktion hat 3 NS, eine davon mit algebr. Vielfachheit 2: $x_1 = -1$; $x_2 = -2$; $x_3 = -3$

12) a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$
$f''(x) = 6x - 12$ $f'''(x) = 6$

N.B.: $f''(x) = 0$
$6x - 12 = 0$
$6x = 12$
$x = 2$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
$f'''(2) = 6 \neq 0$

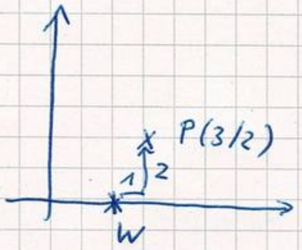
y-Wert: $f(2) = 8 - 6\cdot 4 + 11\cdot 2 - 6 = 0$

Liegt $W(2|0)$ auf der Geraden?

$$0 = 2 - 2 \checkmark$$

$\Rightarrow$ Behauptung

b)

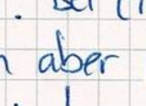


$$
\begin{aligned}
h(x) &= f(x-1) + 2 \\
&= (x-1)^3 - 6\cdot(x-1)^2 + 11\cdot(x-1) - 6 + 2 \\
&= (x^2-2x+1)(x-1) - 6(x^2-2x+1) + 11x - 11 - 4 \\
&= x^3 - 2x^2 + x - x^2 + 2x - 1 - 6x^2 + 12x - 6 + 11x - 15 \\
&= x^3 - 9x^2 + 26x - 22
\end{aligned}
$$

13) (1) ist wahr, da $f'(x) > 0$ für $-3 < x < 3$
(was im „Schaubild" zu erkennen ist)

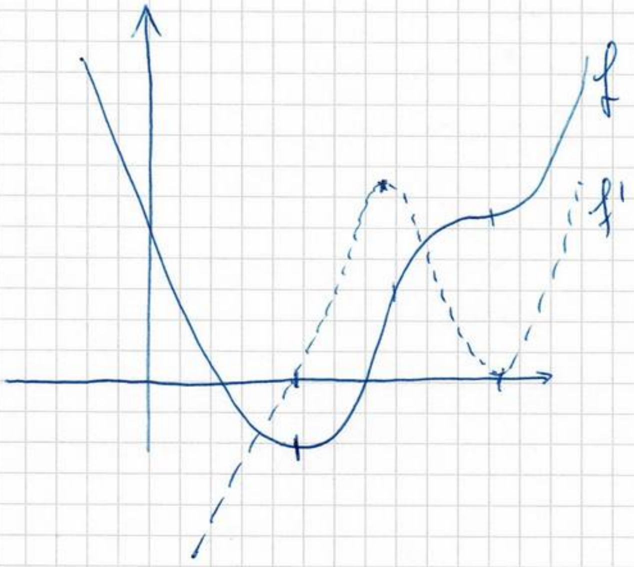
(2) Ein Wendepunkt ist ein Extrempunkt von f'. Laut „Schaubild" gibt es bei $x = 0$ einen Hochpunkt
$\Rightarrow$ Aussage wahr

(3) falsch
Der Graph von f steigt ununterbrochen von $x = -3$ bis $x = 3$. Bei einer Symmetrie zur y-Achse müssten aber bestimmte y-Werte gleich sein


← gleiche Werte

(4) unentscheidbar
Es ist nicht klar, von wo aus f ab $x = -3$ steigt.

14a)



ES von f ⟶ NS von f'
WS von f ⟶ ES von f'

b) f hat einen Tiefpunkt und einen Sattelpunkt, dies entspricht 3 ES

15a) $n(0) = 500$

$n(2) = 3 \cdot 4 - 60 \cdot 2 + 500 = 392$

$\text{mittl. Änd.} = \frac{n(2) - n(0)}{2-0} = \frac{392-500}{2} = -54$

b) $n'(t) = 6t - 60$

$n'(t) = -30$

$6t - 60 = -30 \quad | +60$

$6t = 30 \quad | :6$

$t = 5$

$\Rightarrow$ 5 Stunden nach Beginn der Messung

16) a) C entspricht dem Wert $Q(0)$, also der Ladungsmenge am Beginn des Beobachtungszeitraums.

b) Wir bestimmen zuerst C:

$$Q(0{,}5) = 18{,}75$$
$$5 \cdot 0{,}5^2 - 5 \cdot 0{,}5 + C = 18{,}75$$
$$5 \cdot 0{,}25 - 2{,}5 + C = 18{,}75$$
$$1{,}25 - 2{,}5 + C = 18{,}75$$
$$-1{,}25 + C = 18{,}75$$
$$C = 20$$
$$\Rightarrow Q(t) = 5t^2 - 5t + 20$$

Wie groß ist die Ladung zum Zeitpunkt $t=4$?

$$Q(4) = 5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 + 20 = 80 - 20 + 20 = 80$$

Wann ist der Akku entladen?

$80 : 5 = 16$

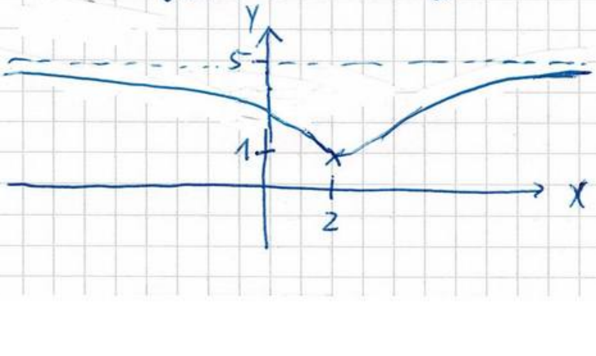
Antwort: 16 Zeiteinheiten

17) (1) Der Punkt $A(2|1)$ liegt auf dem Graphen

(2) $A(2|1)$ hat eine waagerechte Tangente, es ist eine ES oder ein SP

(3) Wendepunkt bei $B(4|f(4))$

(4) Der Graph nähert sich nach links und rechts dem Wert 5 an



18a) Abb. 1 kann es nicht sein, da $f(0) = -2$ ist, $P(0|-2)$ aber nicht auf dem Graphen von Abb. 1 liegt.
Abb. 3 und 4 kommen aus demselben Grund nicht in Frage
Da eine der Abbildungen den Graphen zeigt (laut Aufgabenstellung), muss es Abb 2 sein.

b) $g(x) = f(x-2)$ $\quad a = 2$
g ist in Abb. 4 zu sehen. Der Graph ist um 2 nach rechts verschoben

$h(x) = -0{,}5 \cdot f(x)$ $\quad b = -0{,}5$
h ist in Abb. 3 zu sehen. Der Graph wurde um den Faktor 0,5 gekürzt und an der y-Achse gespiegelt.

c) Abb. 1 zeigt $i(x) = f(x) + 3$

19) (1) falsch
f' ist links und rechts von $x = -2$ positiv, f wächst also links und rechts von $x = -2$ ⇒ Sattelpunkt
(2) WP von f sind ES von f'
f' hat 2 ES: bei $x_1 = -2$ und $x_3 = 1$
⇒ wahr
(3) Es gilt: $f'(0) = 4$ (ablesbar aus Schaubild)
Die Steigung der Winkelhalb. ist 1
$4 > 1$ ⇒ wahr
(4) f' ist positiv für $0 \leq x \leq 5$ ⇒ f steigt von $x = 0$ bis $x = 5$ an ⇒ $f(0) < f(5)$
⇒ falsch

20) $g(x) = x^3$ wäre symmetrisch zum Ursprung. Im Vergleich dazu ist f nur um 4 nach oben verschoben. Das Spiegelzentrum liegt also in $Z(0/4)$.