AUFGABEN (TEIL MIT HILFSMITTELN)

1) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2$.

a) Bestimme die Nullstellen von f

b) Bestimme rechnerisch die Extremstellen von f.

c) Gib die Monotoniebereiche von f an.

d) Bestimme die Stellen, an denen der Graph keine Krümmung hat.

e) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Tangente an f durch $P(0/y_0)$.

f) Bestimme die Stellen, an denen der Graph einen Steigungswinkel von 40° besitzt.

g) Gib das Fernverhalten des Graphen an.

h) Bestimme rechnerisch die Gleichung einer Geraden, die genau 2 Schnittpunkte mit f hat.

i) Bestimme rechnerisch die Gleichung einer Geraden, die genau einen Schnittpunkt mit f hat.

j) Wir spiegeln den Graphen von f an der x-Achse. Dadurch entsteht der Graph einer Funktion g. Gib die Funktionsgleichung von g an.

k) Wir spiegeln den Graphen von f an der y-Achse. Dadurch entsteht der Graph einer Funktion h. Bestimme die Funktionsgleichung von h.

2) Gegeben sei ein Stausee. Die Funktion $f(x) = x^3 - 11x^2 + 28x$, $0 \leq x \leq 7$, beschreibt, wie viel Wasser pro Stunde zu- bzw. abfließt (Veränderungsrate). Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und $f(x)$ für die Veränderungsrate in Tausend Liter pro Stunde. Eine positive Veränderungsrate bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss.

a) Bestimme die Höhe der Veränderungsrate um 12 Uhr

b) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Veränderungsrate 10.000 l/h beträgt.

c) Bestimme rechnerisch die Zeitpunkte, wo die Abflussrate bzw. die Zuflussrate am höchsten war. Gib die jeweilige Höhe der Rate an.

d) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Veränderungsrate am stärksten zugenommen hat.

e) Bestimme rechnerisch die Zeitpunkte, zu denen am meisten bzw. am wenigsten Wasser im Stausee war.

f) Zeigen Sie: Innerhalb der ersten vier Stunden sind mit Sicherheit weniger als 84.000 l in den Stausee hineingeflossen.

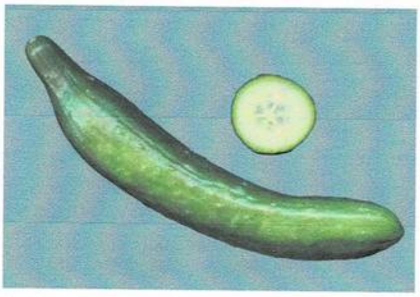
g) Die Funktion g beschreibt die Veränderungsrate des hier betrachteten Stausees, wenn man zusätzlich zu den bei f schon berücksichtigten Zu- und Abflüssen noch einen Zufluss öffnet, durch den konstant 10.000 l/h zufließen.

① Bestimme die Gleichung von g

② Bestimme, ob es noch Zeiträume gibt, wo mehr Wasser ab- als zufließt.

3) (Abitur Hamburg 2012)

Der große Lebensmittelkonzern AKEDE bot in seinen Geschäften vor der EHEC-Epidemie im Frühjahr 2011 Salatgurken zu einem Preis von 0,50 € pro Stück an. Der Konzern zahlt den liefernden Landwirten 0,25 € pro Salatgurke.



Landwirt Kleinschmidt baut Salatgurken für AKEDE an. Seine Kosten werden von der Funktion $K(x) = \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{50}{3}x + 100$ beschrieben. Dabei steht x für die tägliche Produktionsmenge an Kisten mit jeweils 100 Gurken und $f(x)$ für die täglichen Kosten in Euro.

a) Bestimme eine Funktion $G(x)$, mit der Landwirt Kleinschmidt seinen täglichen Gewinn bzw. Verlust bestimmen kann.

b) Bestimme rechnerisch die Produktionsmengen, bei denen Herr Kleinschmidt insgesamt Gewinn macht.

c) Berechnen Sie die Produktionsmenge, bei der Landwirt Kleinschmidt den maximalen Gewinn erzielt, und geben Sie den größtmöglichen Gewinn an.

Im Frühjahr 2011 kam es zu einer Vielzahl an EHEC-Infektionen. Die Gesundheitsbehörden warnten in dieser Zeit eindringlich vor dem Verzehr von rohen Tomaten, Gurken, Salat und Sojasprossen. Um dennoch möglichst viele der gelieferten Salatgurken abzusetzen, beschloss das Unternehmen AKEDE einige Tage später, den Preis zu senken und auch den Landwirten wie Herrn Kleinschmidt nur noch 15 € pro Kiste zu zahlen.

d) Bestimme rechnerisch, ob Herr Kleinschmidt unter diesen Bedingungen noch einen Gewinn erwirtschaften kann.

e) Herr Kleinschmidt fragt sich, welchen Preis er pro Kiste von AKEDE mindestens erhalten muss, damit er zumindest keinen Verlust erwirtschaftet. Beschreibe, wie er diesen Preis zeichnerisch bestimmen könnte.

f) AKEDE verkaufte die Salatgurken nach der Preissenkung in seinen Geschäften zu einem Preis von 0,20 €.

- Ermitteln Sie, wie viele Salatgurken die Filiale in Husstadt nach der Preissenkung mindestens täglich verkaufen müsste, damit die Preissenkung nicht zu einer weiteren Reduzierung des Erlöses für AKEDE führt.
- Beurteilen Sie, ob das Ziel einer Steigerung des Erlöses mittels der beschriebenen Preissenkung in der Krisensituation realistisch ist.

4) Der Verlauf einer Straße wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = x^3 - 12x^2 + 32x$, $0 \leq x \leq 9$. Die x- und y-Achse geben die Himmelsrichtungen an. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität.

a) Bestimme rechnerisch die am weitesten nördlich und die am weitesten südlich gelegene Stelle der Straße.

b) Der Ort Tiexdorf hat die Koordinaten T(2|24). Bestimme rechnerisch, ob die Straße durch Tiexdorf verläuft.

c) Bestimme rechnerisch, wie weit man von Tiexdorf aus nach Osten gehen muss, um (wieder) auf die Straße zu stoßen.

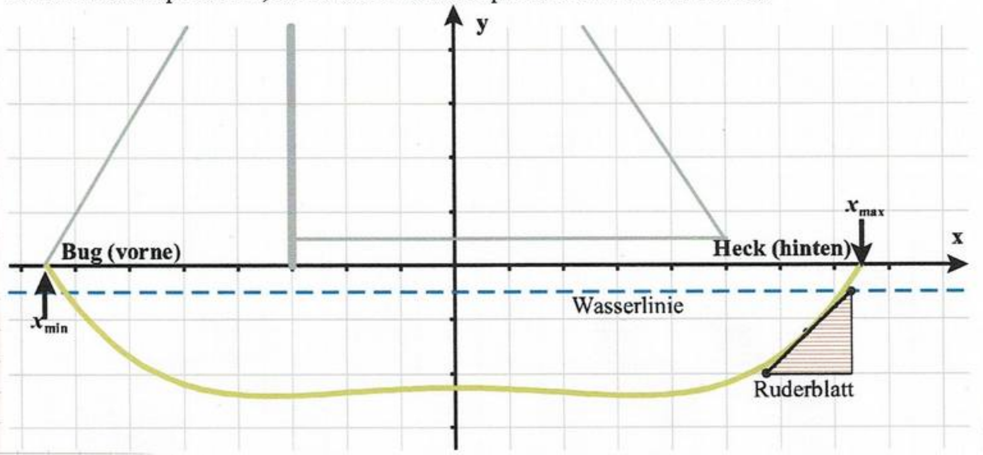
d) Gib an, in welchen Bereichen die Straße nach links bzw. nach rechts gekrümmt ist.

5) (Abitur Hamburg 2010)

Der Segler Piet Meyer möchte sich eine neue Jacht für das Hochseesegeln bauen lassen. Dazu trifft er sich mit seinem Schiffskonstrukteur, um dessen Entwurf für die Rumpfform von Meyers neuem Schiff zu diskutieren.
Der Konstrukteur stellt für die Seitenansicht des Schiffes die folgende Funktion f auf:

$$f(x)=\frac{1}{6750}x^4-\frac{1}{75}x^2-4{,}5 \quad \text{für} \quad x\in[x_{min};x_{max}] \text{ (siehe Skizze)}$$

Eine Einheit entspricht 1 m, eine Kästchenseite entspricht hier 2 m in der Realität.



a) Bestimme die Länge des Schiffes

Der Rumpf eines Schiffes ist allerdings nicht komplett unter Wasser. Es ragt ein gewisser Teil aus dem Wasser heraus. Die Seitenansicht dieses Teils nennt man *Freibord*. Wir gehen davon aus, dass die Wasserlinie parallel zur oben eingezeichneten x-Achse liegt.

b) Bestimmen Sie den maximalen Tiefgang, wenn das Freibord um $h=1\,\text{m}$ über die Wasserlinie herausragt.

In dem Punkt $(13\,|\,f(13))$ wird ein Ruderblatt in Form eines rechtwinkligen Dreiecks befestigt. Die Hypotenuse des Dreiecks soll dabei tangential zum Rumpf verlaufen, d.h. den Rumpf im angegebenen Befestigungspunkt berühren, und soll genau bis zur Wasserlinie reichen.

c)
- Zeigen Sie, dass die Gleichung dieser Tangente in guter Näherung $g(x)=0{,}96x-15$ lautet.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der Wasserlinie und berechnen Sie die Fläche in der Seitenansicht des Ruderblattes, wenn das Ruderblatt 3 m hoch ist.

Die maximale Geschwindigkeit, die ein Schiff der obigen Bauart durch Windkraft erreichen kann, hängt von der Länge des Schiffes entlang der Wasserlinie ab. Eine Faustformel zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit v in km/h ist für ein Einrumpfschiff

$$v_E=4{,}5\cdot\sqrt{\text{Länge des Schiffes in m entlang der Wasserlinie}}$$

d) Berechnen Sie, wie schnell Herr Meyer mit der obigen Konstruktion eines Einrumpfschiffes maximal sein kann und wie lange er auf einer Regattastrecke von 500 Seemeilen mindestens unterwegs sein wird (1 Seemeile ≈ 1852 m).

6) (Abitur Baden-Württemberg 2015)

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird beschrieben durch die Funktion $f(x)=\frac{1}{125}x^4$, $-5 \leq x \leq 5$. Alle Angaben sind in Metern.

a) Bestimme die Tiefe des Laderaumes in der Mitte

b) Bestimme die Breite des Laderaumes in 3 m Höhe

c) Bestimme den Bereich, in dem der Boden des Laderaums eine Steigung unter 2,86° hat

d) Zur Wartung steht der Lastkahn auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte am Kahn durch die Punkte $P_1(-4 \mid f(-4))$ und $P_2(4 \mid f(4))$ beschrieben werden.

Bestimme rechnerisch, in welchem Abstand voneinander diese Stützen auf der Plattform enden.