LÖSUNGEN (TEIL MIT HILFSMITTELN)

1a) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}24\\36\\36\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}25\\38\\37\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(25/38/37)$

Das Raumschiff befindet sich am Ort $P(25/38/37)$.

b) $\left|\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22} \approx 4{,}69$

Das Schiff bewegt sich pro Minute 4,69 km.

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ min} & — & 4{,}69 \text{ km} \\ 1 \text{ h} & — & 281{,}4 \text{ km} \end{array} \quad \cdot 60$$

Die Geschwindigkeit beträgt 281,4 km/h.

c) (i)

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\15\\14\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \Big| -s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\13\\13\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 13 \\ 3 & -1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot II - 3 \cdot I \\ 2 \cdot III - 3 \cdot I \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow s = 20$

$\Rightarrow 2r - 20 = 2$

$2r = 22 \quad | :2$

$r = 11$

$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 \\ 33 \\ 33 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 23 \\ 35 \\ 34 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S(23/35/34)$

Die Routen schneiden sich im Punkt $S(23/35/34)$.

(ii) Wann sind die Schiffe in S?

Schiff 1: Zeit in min ab 10 Uhr

$\Rightarrow$ 10:11 Uhr

Schiff 2: Zeit in min ab 9:50 Uhr

$\Rightarrow$ 10:10 Uhr

Die Schiffe passieren den Punkt S in 1 min Abstand. Sie kollidieren (vermutlich) nicht.

d) xz-Ebene: $E: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Big| - r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow -3r = 2$

$r = -2/3$

$\Rightarrow v + 2 = 1$

$v = -1$

$\Rightarrow u + \frac{4}{3} = 1$

$u = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow r = -\frac{2}{3}$ ~~deutet~~ deutet die Zeit an

$\Rightarrow$ vor $\frac{2}{3}$ min.

2a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -23-(-51) \\ 51-27 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Stelle, wo die Gleise die Richtung ändern (von der Geraden g zur Geraden h) ist der Schnittpunkt von g und h:

$$\begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 98 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 91 \\ 42 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} \quad \left| - \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} \right| - s \cdot \begin{pmatrix} 91 \\ 42 \\ -0{,}6 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -91 \\ -42 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126 \\ 78 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 28 & -91 & 126 \\ 24 & -42 & 78 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}5 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 0{,}6\, s = -0{,}5$

$s = -\frac{5}{6}$

$\Rightarrow 28r - 91 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 126$ und $24r - 42 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = 78$

$28r + \frac{455}{6} = 126$ $\qquad$ $24r + \frac{210}{6} = 78$

$28r = 50\frac{1}{6}$ $\qquad$ $24r = 43$

$r = 1\frac{19}{24}$ $\qquad$ $r = 1\frac{19}{24}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(1\frac{19}{24}\right) \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{43}{24} \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50\frac{1}{6} \\ 43 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8\frac{1}{6} \\ 63 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S(8\frac{1}{6}/63/1)$.

Der Punkt hat die Koordinaten $S(8\frac{1}{6}/63/1)$.

b) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{PO}$

$$= \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix}$$

oder:

$$\begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 26-(-4) \\ 86-90 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{900+16+0} = \sqrt{916} \approx 30{,}27\ LE$
$= 30{,}27\ m$

Die Länge der Turmseite beträgt ca. 30,27 m.

Bestimmung der drei Punkte:

$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{CD}$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 90 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 90 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 89 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_1(3{,}5/89/1)$

$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{4} \cdot \overrightarrow{CD}$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 90 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 \\ 88 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P_2(11/88/1)$

$$\vec{OP_3} = \vec{OC} + \frac{3}{4} \cdot \vec{CD}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 \\ 90 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 18{,}5 \\ 87 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_3\,(18{,}5/87/1)$$

Die gesuchten Punkte sind $P_1\,(3{,}5/89/1)$, $P_2\,(11/88/1)$ und $P_3\,(18{,}5/87/1)$.

d) Die Figur steht senkrecht zur xy-Ebene.
Ihre Richtung entspricht also dem des Normalenvektors der xy-Ebene

$$E: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

Für die Marktplatz-Ebene gilt:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -42 \\ 20 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 42 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 42 \\ -20 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 0 \\ 0 - (-7) \\ -140 - 252 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ -392 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 7 & 42 \\ 6 & -20 \\ 0 & -1 \\ 7 & 42 \\ 6 & -20 \end{array}$$

Für den Winkel gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-6\\7\\-392\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-6\\7\\-392\end{pmatrix}\right|} = \frac{392}{1\cdot\sqrt{153.749}} = \frac{392}{\sqrt{153.749}}$$

$$\Rightarrow \alpha = 88{,}65°$$

3a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2-0\\1-(-3)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2-0\\-2-(-3)\\0{,}25-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0{,}25\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}0-(-2)\\2-(-2)\\0{,}25-0{,}25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ $\quad\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0-2\\2-1\\0{,}25-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0{,}25\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\1\\0{,}25\end{pmatrix} = -4+4 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ Rechteck

Länge und Breite:

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\,m$

$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-2)^2+1^2+0{,}25^2} = \sqrt{4+1+0{,}0625}$

$= \sqrt{5{,}0625}$

$= 2{,}25\,m$

Das Rechteck hat eine Länge und Breite von $\approx 4{,}47\,m$ bzw. $2{,}25\,m$.

b) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AC}$

$= \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix}$

Punktprobe für D:

$$\begin{pmatrix}-2\\-2\\0{,}25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\0{,}25\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}2 & 0 & -2\\4 & 5 & 1\\0 & 0{,}25 & 0{,}25\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 0{,}25s = 0{,}25$$
$$s = 1$$
$$\Rightarrow 2r = -2$$
$$r = -1$$
$$\Rightarrow 4\cdot(-1) + 5\cdot 1 = 1$$
$$-4 + 5 = 1$$
$$1 = 1 \checkmark$$

$\Rightarrow$ D liegt in E.

c) Die horizontale Ebene ist die xy-Ebene.

Normalenvektor: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{array}$$

Der Normalenvektor der Ebene E sei $\vec{n_2}$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-0\\0-0{,}5\\10-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\10\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}2 & 0\\4 & 5\\0 & 0{,}25\\2 & 0\\4 & 5\end{array}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\10\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\10\end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{101{,}25}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{101{,}25}}\right) \approx 6{,}38°$$

d) $\vec{OM} = \vec{OB} + 0{,}5\cdot\vec{BC}$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0{,}25\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\1{,}5\\0{,}125\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M(1/1{,}5/0{,}125)$

Da die Zeltstange senkrecht auf E steht, eignet sich der Normalenvektor $\vec{n_2}$ zur Angabe der Richtung: $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\10\end{pmatrix}$

e) Hangebene: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix}$

Schattenlinie: $g: \vec{x} = \vec{OP} + t\cdot\vec{r}$

$$= \begin{pmatrix}-0{,}8\\-2{,}6\\2{,}1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0{,}8\\-2{,}6\\2{,}1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix} \quad \left| -\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} \right| -t\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}4\\2{,}1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0{,}25\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-5\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & -5 & -0{,}8\\4 & 5 & 1 & 0{,}4\\0 & 0{,}25 & 2 & 2{,}1\end{array}\right)$$

GTR ... $r \approx 3{,}05$

$s \approx -2{,}63$

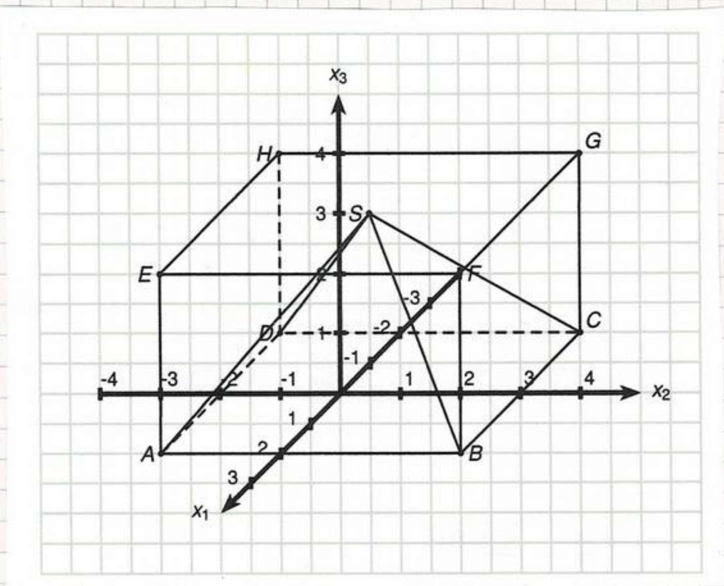
$t \approx 1{,}38$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix}-0,8\\-2,6\\2,1\end{pmatrix} + 1,38\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}6,1\\-3,98\\-0,66\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}6,1\\-4\\-0,7\end{pmatrix} \Rightarrow Q\,(6,1/-4/-0,7)$$

Der Punkt ist $Q\,(6,1/-4/-0,7)$.

4a)



(Musterlösung Aufgabensammlung Hamburg)

b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2-2\\3-(-2)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2-2\\3-3\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix}-2-(-2)\\3-(-2)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-2-2\\-2-(-2)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

Überprüfung eines Winkels:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ Rechteck

Damit das Rechteck ein Quadrat ist, müssten die Seiten gleich lang sein.

$|\vec{AB}| = 5$ cm
$|\vec{AD}| = 4$ cm
$\Rightarrow |\vec{AB}| \neq |\vec{AD}|$
$\Rightarrow$ kein Quadrat

c) $E_1: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AS}$
$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene.

$E_G: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 0
0 1
0 0
1 0
0 1

Der Normalenvektor von E_1 sei $\vec{n_1}$

$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

0 -2
5 2,5
0 3
0 -2
5 2,5

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}\right|} = \frac{10}{\sqrt{325}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{325}}\right) \approx 56,31°$$

Der Winkel hat eine Größe von 56,31°.

e) Die x_3-Achse (bzw. z-Achse) wird beschrieben durch

$g_z: u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Kante $\overline{DS}$ liegt auf der Geraden durch D und S:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + v \cdot \overrightarrow{DS}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 - (-2) \\ 0{,}5 - (-2) \\ 3 - 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt:

$$u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2{,}5 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -2 \\ -2{,}5 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -2v = -2 \text{ und } -2{,}5v = -2$$
$$v = 1 \text{ und } v = 0{,}8 \quad ↯$$

Sie schneiden sich nicht.

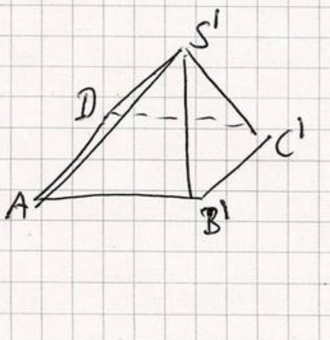
f) Es gibt zwei mögliche Positionen:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Positionen sind $P_1(2/-\frac{1}{3}/0)$ und $P_2(2/\frac{4}{3}/0)$.

g)



$V = G \cdot h$

$9\,cm^3 = G \cdot 2\,cm \quad | : 2\,cm$

$4{,}5\,cm^2 = G$

$G = |\overrightarrow{AD}| \cdot |AB'|$

$4{,}5\,cm^2 = 4\,cm \cdot |AB'| \quad | : 4\,cm$

$\frac{9}{8}\,cm = |AB'|$

$\Rightarrow$ B' ist $8/9$ cm von A entfernt und liegt in derselben Richtung wie B

Es gilt: $|\overrightarrow{AB}| = 5\,cm$

$\frac{1}{5} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Einheitsvektor)

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA} + \frac{9}{8} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 9/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -7/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B'(2 | -7/8 | 0)$

Es gilt $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$ (Rechteck & Parallelogramm)

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{AD}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ -7/8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

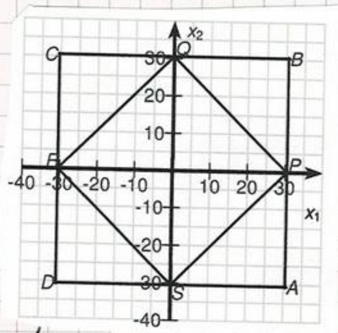
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -7/8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow C'(-2 | -7/8 | 0)$

Die neue Spitze muss nur 2 cm über der Grundfläche sein. Laut Aufgabenstellung muss sie nicht genau über der Mitte der Grundfläche sein.

$\Rightarrow S'(0 | 0{,}5 | 2)$

5a) Draufsicht = Man schaut von oben parallel zur z-Achse auf die Figur
Der z-Wert ist nicht mehr zu erkennen



(Musterlösung Aufgabensammlung Hamburg)

Die Eckpunkte erhält man, wenn man einfach die z-Koordinate weg läßt:

$P'(30{,}5/0/0)$, $Q'(0|30{,}5/0)$
$R'(-30{,}5/0/0)$, $S'(0|-30{,}5/0)$

P' liegt in der Mitte zwischen A und B
Q' " " " B und C
R' " " " C und D
S' " " " A und D

$\Rightarrow$ P', Q', R', S' liegen auf den Seiten der Grundfläche.

b)

$$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 30{,}5 - 30{,}5 \\ 30{,}5 - 0 \\ 0 - 361 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} 0 - 30{,}5 \\ 30{,}5 - 30{,}5 \\ 361 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 - 30{,}5 \\ 30{,}5 - 0 \\ 361 - 361 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{30{,}5^2 + 361^2} \approx 362{,}29\,m \qquad |\overrightarrow{BQ}| = \sqrt{30{,}5^2 + 361^2} \approx 362{,}29\,m \qquad |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{30{,}5^2 + 30{,}5^2} \approx 43{,}13\,m$$

Es gilt: $|\overrightarrow{PB}| = |\overrightarrow{BQ}| \neq |\overrightarrow{PQ}|$

Daher handelt es sich um ein gleichschenkliges, aber nicht gleichseitiges Dreieck.

c) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \overrightarrow{PB} + s \cdot \overrightarrow{PQ}$

$$= \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Die Grundfläche liegt in der xy-Ebene.

$$E_G: \vec{x} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor von E sei $\vec{n_2}$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11010{,}5 \\ 11010{,}5 \\ 930{,}25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & -30{,}5 \\ 30{,}5 & 30{,}5 \\ -361 & 0 \\ 0 & -30{,}5 \\ 30{,}5 & 30{,}5 \end{matrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 11010{,}5 \\ 11010{,}5 \\ 930{,}25 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 11010{,}5 \\ 11010{,}5 \\ 930{,}25 \end{pmatrix}\right|} \approx \frac{930{,}25}{15.598{,}96}$$

$$\alpha \approx \cos^{-1}\left(\frac{930{,}25}{15.598{,}96}\right) \approx 86{,}58°$$

e) Wir suchen die Punkte P_2 und Q_2, für die $z = 200$

P_2 muss auf der Geraden durch P und B liegen

$g_3: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + w \cdot \overrightarrow{PB}$

$$= \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix}$$

$P_2(x|y|200)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 200 = 361 + w \cdot (-361) \quad | -361$$

$$-161 = w \cdot (-361) \quad | : (-361)$$

$$0{,}446 \approx w$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix} + 0{,}446 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ -361 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 13{,}6 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_2\ (30{,}5 / 13{,}6 / 200)$$

Q_2 muss auf der Geraden durch B und Q liegen

$$g_4: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + p \cdot \overrightarrow{BQ}$$

$$= \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 200 = p \cdot 361 \quad | : 361$$

$$0{,}554 = p$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ 30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}554 \cdot \begin{pmatrix} -30{,}5 \\ 0 \\ 361 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13{,}6 \\ 30{,}5 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_2\ (13{,}6 / 30{,}5 / 200)$$

Nun zur Strecke $\overline{P_2Q_2}$

$$|\overrightarrow{P_2Q_2}| = \left| \begin{pmatrix} 13{,}6 - 30{,}5 \\ 30{,}5 - 13{,}6 \\ 200 - 200 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -16{,}9 \\ 16{,}9 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16{,}9^2 + 16{,}9^2}$$

$$= 23{,}9\ \text{m}$$

Die Strecke ist 23,9 m lang.

f) Gerade durch A und P:

$$g_1: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{AP}$$

$$= \begin{pmatrix} 30{,}5 \\ -30{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30{,}5 \\ 361 \end{pmatrix}$$

Gerade durch C und R:

$$g_2: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + m \cdot \overrightarrow{CR}$$
$$= \begin{pmatrix}-30,5\\30,5\\0\end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix}0\\-30,5\\361\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}30,5\\-30,5\\0\end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix}0\\30,5\\361\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30,5\\30,5\\0\end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix}0\\-30,5\\361\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}-30,5\\30,5\\0\end{pmatrix} \quad \Big| - q \cdot \begin{pmatrix}0\\30,5\\361\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}61\\-61\\0\end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix}0\\-30,5\\361\end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix}0\\30,5\\361\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 61 = 0$ ↯

$\Rightarrow$ kein Schnittpunkt, also parallel oder windschief

$\Rightarrow$ windschief, da die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander sind

6a) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OS_1} + r \cdot \overrightarrow{S_1S_2} + s \cdot \overrightarrow{S_1S_3}$
$$= \begin{pmatrix}0\\6\\2,5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0-0\\0-6\\3-2,5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}6-0\\0-6\\2,5-2,5\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0\\6\\2,5\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}0\\-6\\0,5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix}$$

b) Es gilt für die Fläche des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{S_1S_2} \times \overrightarrow{S_1S_3} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix}0\\-6\\0,5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix}3\\3\\36\end{pmatrix} \right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9+9+1296}$$
$$\approx 18,12 \text{ m}^2$$

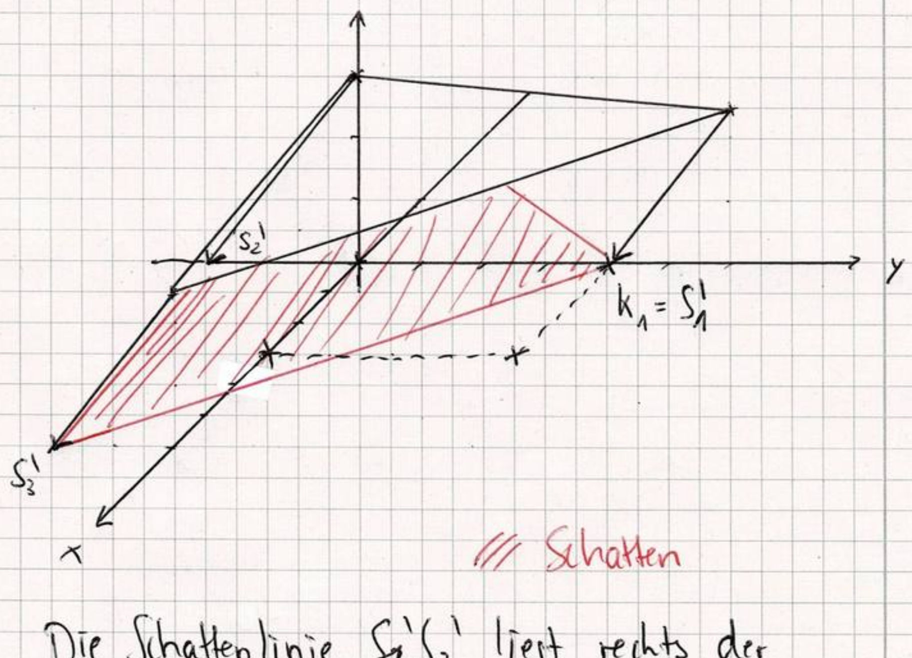
$$\begin{array}{cc} 0 & 6 \\ -6 & -6 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{array}$$

Es ist nicht notwendig.

c) $\overrightarrow{S_1K_1} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 4-6 \\ 0-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2,5 \end{pmatrix}$

Durch die Null verändert sich die x-Koordinate nicht, wenn der Schattenpunkt entsteht.
$S_2\,(0/0/3)$ hat als x- und y-Koordinate Null.
Wenn dieser Punkt auf seinen Schattenpunkt projiziert wird, so verbleibt er in der xz-Ebene.
Da er nach links unten projiziert wird, befindet sich S_2' auf der y-Achse.

d)



Die Schattenlinie $S_2'S_3'$ liegt rechts der Diagonalen K_1K_3
$\Rightarrow$ mehr als die Hälfte im Schatten

e) Der horizontale Boden ist die xy-Ebene.
Diese hat als Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_H : \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}$$

Der Normalenvektor von E sei $\vec{n}_2$

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix}$$

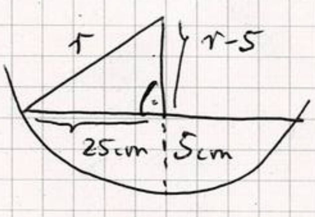
$$\begin{array}{cc} 0 & 6 \\ -6 & -6 \\ 0{,}5 & 0 \\ 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{array}$$

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right|}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 36 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{36}{\sqrt{1314}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{36}{\sqrt{1314}}\right) = 6{,}72°$$

Der Winkel ist kleiner als 8°
$\Rightarrow$ Abfluß nicht sichergestellt

f)



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot (3 \cdot 65 - 5)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 25 \cdot 190$$
$$\approx 4974{,}188 \text{ cm}^3$$
$$\approx 4{,}97 \text{ dm}^3$$
$$= 4{,}97 \text{ l}$$

$$(r-5)^2 + 25^2 = r^2$$
$$r^2 - 10r + 25 + 25^2 = r^2$$
$$-10r + 650 = 0$$
$$-10r = -650$$
$$r = 65 \text{ cm}$$

Es sind 4,97 l.