LÖSUNGEN (HILFSMITTELFREIER TEIL)

1a) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 2-0 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

c) $$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Aufpunkt der Ebene

da der Normalenvektor senkrecht auf der Ebene steht

d) Punktprobe mit D (5/2/2)

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{ Vertauschen von I und II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) 2 \cdot \text{I} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow s = 2$ und $2s = 4$

$\Rightarrow s = 2$

$\Rightarrow r + 2 = 2$

$r = 0$

$\Rightarrow$ D liegt auf E

$D \in E$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left| -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| -t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \text{ Vertauschen von I und III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) 2 \cdot \text{I} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) 2 \cdot \text{II} - \text{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 2t = 18$

$t = 9$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S\,(1/10/5)$

f) Es gibt 2 Möglichkeiten:

$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (da der Vektor $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ die Länge 1 hat)

$= \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_1 (1/4/5)$

$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

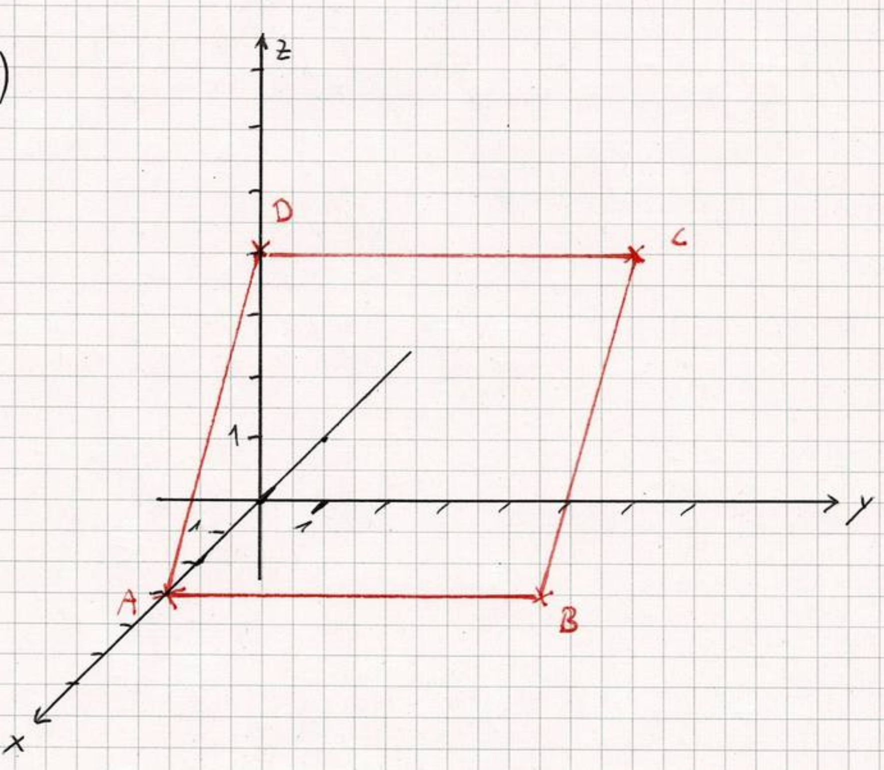
$= \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_2 (1/-2/5)$

Probe: $|\overrightarrow{AP_1}| = \left|\begin{pmatrix}1-1\\4-1\\5-5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}\right| = 3$ LE

$|\overrightarrow{AP_2}| = \left|\begin{pmatrix}1-1\\-2-1\\5-5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix}\right| = 3$ LE

2) a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 6-0 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 6-6 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ (rechter Winkel)

$\Rightarrow$ Rechteck
(Ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel muss ein Rechteck sein.)

c) $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$
$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) Punktprobe für E (6/0/-4)

$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Man sieht sofort: $r = 0$ und $s = -1$
$\Rightarrow$ Der Punkt E liegt auf der Ebene E
Aber er liegt nicht innerhalb des Vierecks, da er unterhalb der xy-Ebene liegt. Das Viereck liegt oberhalb.

e) Bestimmung des Normalenvektors:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24-0 \\ 0-0 \\ 0-(-18) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} 0 & -3 \\ 6 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & -3 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Aufpunkt der Ebene — Normalenvektor der Ebene

3a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{DC}$ $\quad\quad$ $\vec{AD} = \vec{BC}$

$\Rightarrow$ Parallelogramm

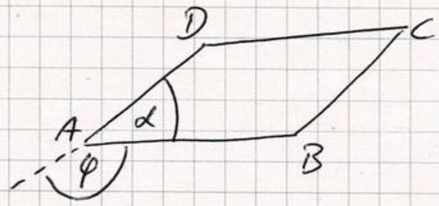
b)

$$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -3+0+2 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Kein rechter Winkel bei A

$\Rightarrow$ Kein Rechteck
(ansonsten müssten alle Winkel rechte sein)

c)



Für den Winkel α gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}$$

Wenn ein Vektor durch seinen Gegenvektor ersetzt wird, so erhält man den Nebenwinkel.

d) Die Diagonalen kann man sich als Geraden vorstellen: d_1 verläuft durch A und C, d_2 durch B und D.

$$d_1: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AC}$$
$$d_2: \vec{x} = \vec{OB} + s \cdot \vec{BD}$$

Für die Untersuchung des Schnittwinkels benötigen wir nur die Richtungsvektoren
(siehe Formel für Schnittwinkel von Geraden)

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 5-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BD} = \begin{pmatrix} -1-3 \\ 1-5 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} \circ \vec{BD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 8 - 16 + 3 = -4 \neq 0$$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel

4) a)

C (0/10/0)	C	hat	dieselbe	x-Koordinate	wie	D
		"	"	y- "	"	B
		"	"	z- "	"	B
E (8/0/8)	E	"	"	x- "	"	A
		"	"	y- "	"	A
		"	"	z- "	"	F
G (0/10/8)	G	"	"	x- "	"	C
		"	"	y- "	"	C
		"	"	z- "	"	F

Zu beachten: Der Quader liegt mit seiner Bodenfläche in der xy-Ebene und die Kanten $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ sowie $\overline{DH}$ liegen auf den Koordinatenachsen. In diesem Fall kann man die Koordinaten von den gegebenen Punkten ablesen.

b) zu ABCD:

$$\vec{OM} = \vec{OD} + 0{,}5 \cdot \vec{DA} + 0{,}5 \cdot \vec{DC}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow M(4/5/0)$$

zu ADHE:

$$\vec{OM} = \vec{OD} + 0{,}5 \cdot \vec{DH} + 0{,}5 \cdot \vec{DA}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow M(4/0/4)$$

c) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M(4/5/4)$

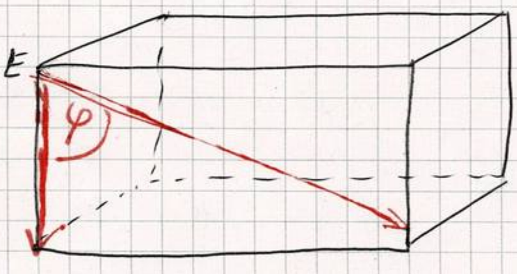
d) Der Quader ist rechtwinklig.

$V = |\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AE}|$

$V = 8 \cdot 10 \cdot 8$

$V = 640$ VE

e)



f) $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AG}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0-8 \\ 10-0 \\ 8-0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \overrightarrow{OH} + s \cdot \overrightarrow{HB}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8-0 \\ 10-0 \\ 0-8 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \Big| - r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 8 \\ 10 & -10 & 0 \\ -8 & -8 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 10 \cdot \mathrm{I} - 8 \cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{I} + \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 8 & 8 & 8 \\ 0 & 160 & 80 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 160\,r = 80$

$r = 0{,}5$

$\Rightarrow 8s + 4 = 8$

$8s = 4$

$s = 0{,}5$

$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Sie schneiden sich.

5a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 2 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow 3y - z = 3$

$3y = 3 + z$

$y = 1 + \frac{1}{3} z$

$\Rightarrow x + 1 + \frac{1}{3} z + z = 6$

$x + 1 + \frac{4}{3} z = 6$

$x = 5 - \frac{4}{3} z$

Lösungen: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{4}{3} z \\ 1 + \frac{1}{3} z \\ z \end{pmatrix}$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot I - II \\ 2 \cdot I - III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 4\cdot II - 3\cdot III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -9z = -9$

$z = 1$

$\Rightarrow 3y = 3$

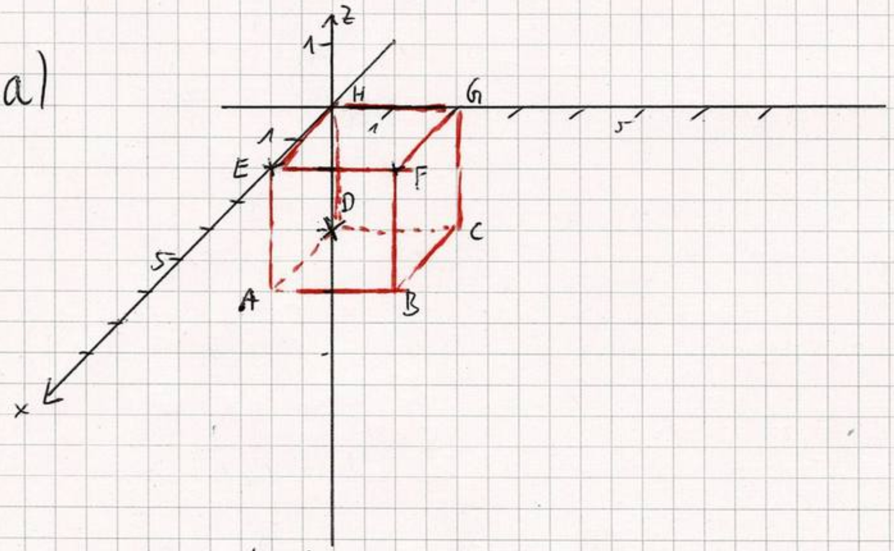
$y = 1$

$\Rightarrow x + 1 + 1 = 3$

$x = 1$

Lösung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

6a)



A (2|0|-2) X-Koordinate wie E

Y- " " D

Z- " " D

b) $g: \vec{x} = \vec{OF} + r \cdot \vec{FO}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Punktprobe für $P(1{,}5/1{,}5/-0{,}5)$

$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

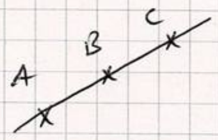
$\begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r = 0{,}25$

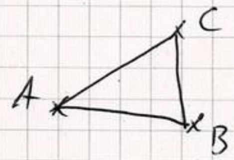
$\Rightarrow$ P liegt auf g

$P \in g$

7a) A, B und C sind dann die Eckpunkte eines Dreiecks, wenn sie nicht auf einer Linie (= Geraden) liegen



Kein Dreieck



Dreieck

Probe: Liegt C auf der Geraden durch A und B?

$g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 2 - 1 \\ -1 - (-2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Punktprobe für C:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r = 0$ und $r = 6$ ↯

$\Rightarrow$ Sie bilden ein Dreieck.

Ebene:

$$E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1-(-2) \\ 1-1 \\ 4-(-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) Rechter Winkel bei B

$$\Rightarrow \vec{BA} \circ \vec{BD} = 0$$
$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d-1 \\ 1-2 \\ 4-(-1) \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d-1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$
$$-3(d-1) + 1 - 5 = 0$$
$$-3d + 3 + 1 - 5 = 0$$
$$-3d - 1 = 0$$
$$-3d = 1$$
$$d = -\frac{1}{3}$$

8a) Es gilt:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow r = 0{,}5$$

b) Rechter Winkel bei B

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = 0$

$$\begin{pmatrix} -2-(-4) \\ 1-0 \\ 4-6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3-(-4) \\ -10-0 \\ 8-6 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$14 - 10 - 4 = 0$$
$$0 = 0 \ \checkmark$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel

9a) $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht zu g

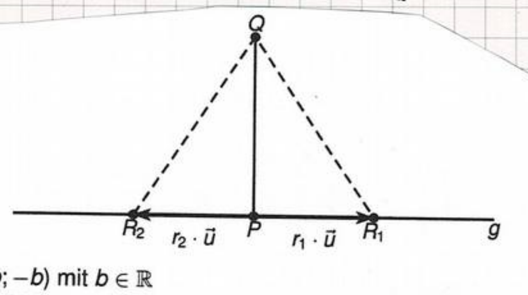
$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ a-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ a-2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

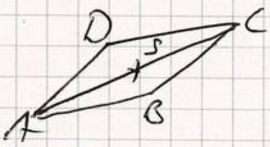
$$3 + 3(a-2) = 0 \quad | :3$$
$$1 + a - 2 = 0$$
$$a - 1 = 0$$
$$a = 1$$

b) (Musterlösung Aufgabensammlung Hamburg)



Wertepaare: $(b; -b)$ mit $b \in \mathbb{R}$
Da die Strecke $\overline{PQ}$ senkrecht zu g steht, haben zwei Punkte R_1 und R_2 genau dann den gleichen Abstand von Q, wenn sie den gleichen Abstand von P haben. Da P der Aufpunkt von g ist haben R_1 und R_2 für $r_1 = b$ und $r_2 = -b$ für alle $b \in \mathbb{R}$ den gleichen Abstand von Q.

10 a)



Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
Daher gilt:

$$\vec{OS} = \vec{OA} + 0{,}5 \cdot \vec{AC}$$
$$= \begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-2-(-4)\\9-5\\4-2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-3\\7\\3\end{pmatrix}$$
$\Rightarrow S(-3/7/3)$

$$\vec{AS} = \begin{pmatrix}-3-(-4)\\7-5\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

b) C liegt auf dem Thaleskreis, wenn bei C ein rechter Winkel ist.

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix}-4-(-2)\\5-9\\2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}$$

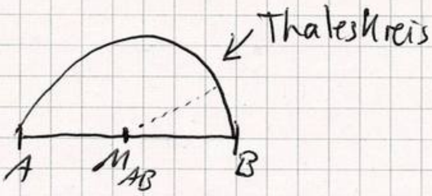
$$\vec{CB} = \begin{pmatrix}8-(-2)\\-1-9\\14-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-10\\10\end{pmatrix}$$

$$\vec{CA} \circ \vec{CB} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}10\\-10\\10\end{pmatrix} = -20+40-20=0$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel

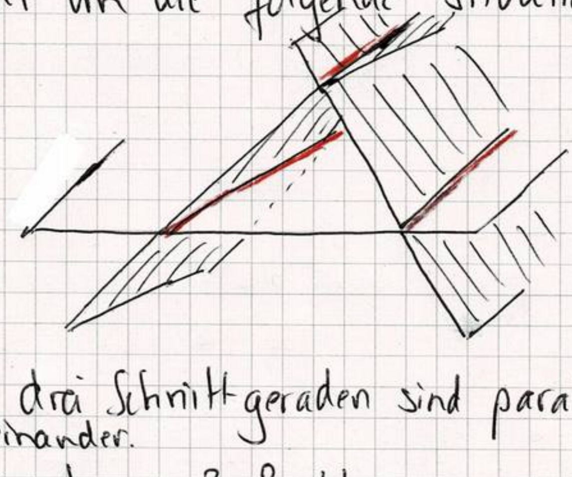
$\Rightarrow$ Behauptung

Zur Erinnerung:

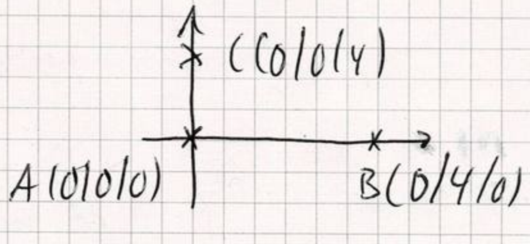


Wenn man über einer Strecke den Thaleskreis errichtet, so schließt jeder Punkt auf diesem mit A und B einen rechten Winkel ein.
Umgekehrt liegen alle Punkte, die mit A und B einen rechten Winkel einschließen, auf diesem.

11) Es geht um die folgende Situation:



Die drei Schnittgeraden sind parallel zueinander.
Wir nehmen 3 Punkte:



$$E_1: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$E_2: \vec{x} = \vec{OB} + t \cdot \vec{BC} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$E_3: \vec{x} = \vec{OC} + v \cdot \vec{CA} + w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Schnittgeraden sind:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_3: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$