AUFGABEN (TEIL MIT HILFSMITTELN)

1) Das Raumschiff „Napoleon III" bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradeaus. Seine Flugroute kann mit der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschrieben werden. Dabei steht r für die Zeit in Minuten ab 10 Uhr und die Koordinaten sind Angaben in Kilometern.

a) Bestimme den Ort, an dem sich das Raumschiff um 10:12 Uhr befindet.

b) Bestimme die Geschwindigkeit des Raumschiffs in $\frac{km}{h}$.

c) Ein zweites Raumschiff bewegt sich entlang der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dabei steht s für die Zeit in Minuten ab 9:50 Uhr und die Koordinaten sind Angaben in Kilometern.

(i) Bestimme rechnerisch, ob sich die Flugrouten schneiden.

(ii) Gib an, ob es zu einem Zusammenstoß der Raumschiffe kommt.

d) Die x-z-Koordinatenebene kennzeichnet eine Staatsgrenze. Bestimme den Zeitpunkt, zu dem das erste Raumschiff diese Grenze überschritten hat.

2) (Abitur Bremen 2010)

Marktplatz

Die Abbildung auf der nächsten Seite zeigt eine Karte des Marktplatzes in Bremen mit dem Rathaus, dem Dom und weiteren sehenswürdigen Gebäuden. Legt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung in die Mitte des Marktplatzes, so dass die x_1-Achse nach Süden, die x_2-Achse nach Osten und die x_3-Achse senkrecht zum Himmel zeigt, ergeben sich die im Folgenden angegebenen Punkte und Vektoren.

Alle Koordinaten sind dabei in Meter angegeben.

Die Vorderseite des Rathauses steht auf der Strecke $\overline{AB}$ mit den Punkten $A(-51|27|1)$ und $B(-23|51|1)$.

a) Von der Obernstraße her führen Straßenbahngleise durch den Punkt $P(-42|20|1)$ genau parallel zur Vorderseite am Rathaus vorbei.
Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g an, die den Verlauf dieser Gleise beschreibt.
Vor dem Dom knickt das Straßenbahngleis nach rechts ab, am Dom vorbei zur Domsheide. Dieser zweite Teil der Gleise wird durch die Gerade h mit der Gleichung $h:\vec{x}=\begin{pmatrix}84\\98\\0{,}5\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}91\\42\\-0{,}6\end{pmatrix};s\in\mathbb{R}$ beschrieben.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, an dem das Straßenbahngleis in die neue Richtung abknickt (Dass der „Knick" in Wirklichkeit abgerundet ist, soll vernachlässigt werden).

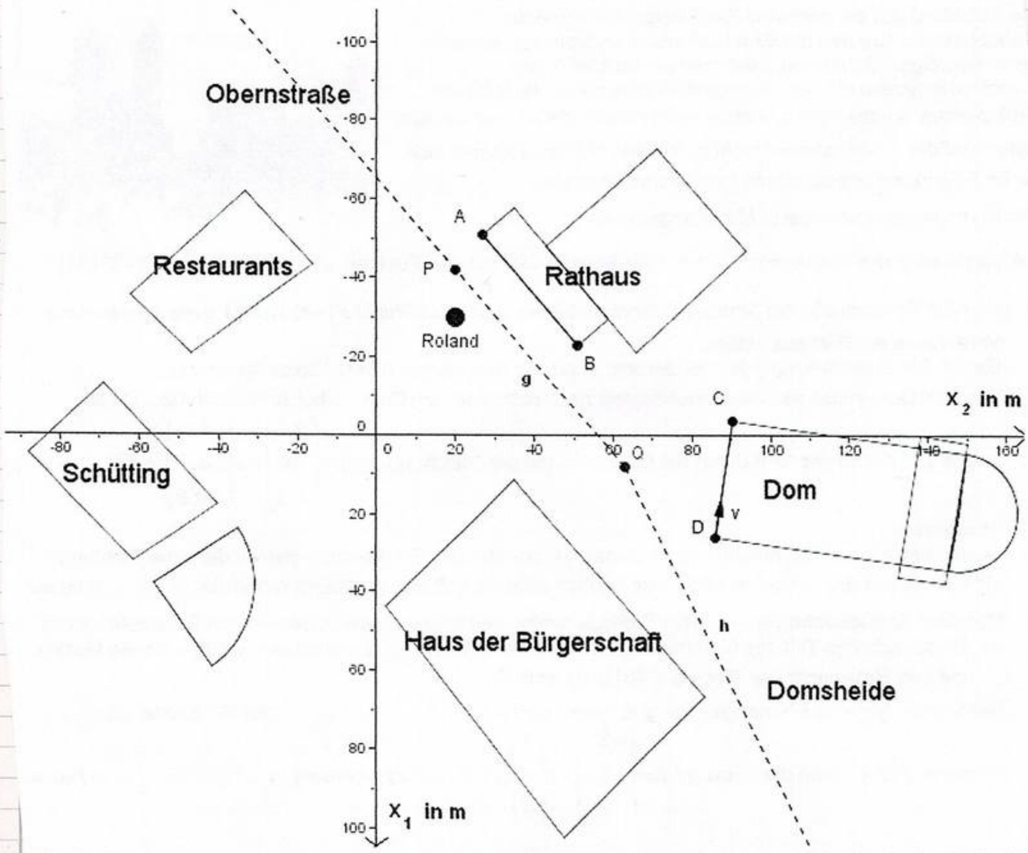
b) Von dem Straßenbahngleis vor dem Rathaus nimmt die Höhe des Marktplatzes nach Südwesten leicht ab. Dieser schräge Teil des Marktplatzes soll durch eine Ebene E beschrieben werden, die die Gerade g und den Mittelpunkt des Platzes $O(0|0|0)$ enthält.
Bestimmen Sie eine Ebenengleichung in Parameterform für die Ebene E.
(Hinweis: Für g kann die Form $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-56\\8\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}7\\6\\0\end{pmatrix};t\in\mathbb{R}$ benutzt werden)

c) Die Turmseite des Domes steht auf der Strecke $\overline{CD}$ mit den Fußpunkten $C(-4|90|1)$ und $D(26|86|1)$. Vier große Torbögen gliedern die Turmseite in vier gleichlange Teile.
Berechnen Sie die Länge der Turmseite.
Ermitteln Sie die drei Punkte, die die Strecke $\overline{CD}$ in vier gleich lange Strecken teilt.

d) Vor dem Rathaus steht das Denkmal „Roland von Bremen" mit standhaftem Blick auf den Dom. Der Roland wurde genau vertikal, d.h. senkrecht auf der x_1-x_2-Ebene errichtet.
Ermitteln Sie den Neigungswinkel der Figur gegen den leicht abschüssigen Marktplatz.

Material zur Aufgabe Marktplatz

Abbildung des Marktplatzes



-3-

3) (Abitur Bremen 2009)

Camping-Zelt

Eine kleine Gruppe junger Leute unternimmt eine Campingreise und schlägt gegen Abend ihr Zelt auf. Der Untergrund ist eben, aber leicht abschüssig am Hang eines Hügels gelegen. Denkt man sich ein Koordinatensystem ungefähr durch die Mitte des Zeltes gelegt, so kann man die Ecken der Grundfläche mit den Punkten $A(0|-3|0)$, $B(2|1|0)$, $C(0|2|0{,}25)$ und $D(-2|-2|0{,}25)$ angeben (vgl. die Zeichnung unten). Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.

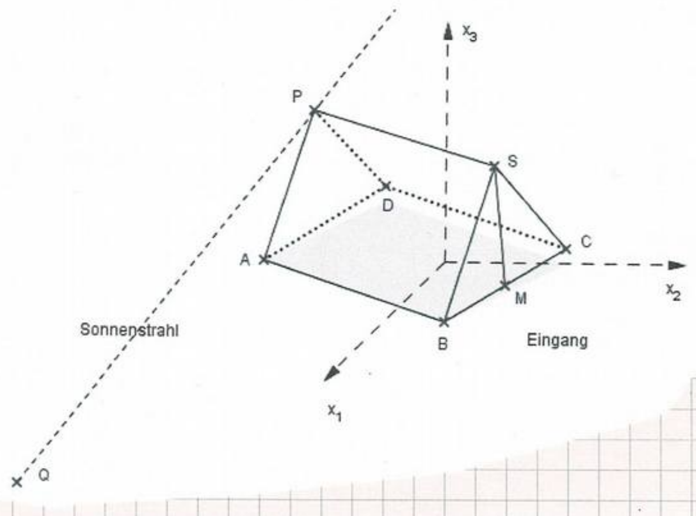
a) Zeigen Sie, dass die Grundfläche $ABCD$ des Zeltes ein Rechteck bildet.
Berechnen Sie die Länge und Breite des Zeltbodens.

b) Die Ebene E, die die Punkte A, B und C enthält, stellt den Hang des Hügels dar.
Bestimmen Sie für die Ebene E eine Ebenengleichung in Parameterform
Begründen Sie, dass auch Punkt D in dieser Ebene liegt.

c) Ermitteln Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der horizontalen Ebene, um eine Vorstellung von der Neigung des Hanges zu erhalten.

d) Der Eingang des Zeltes befindet sich in der Mitte M der Grundseite $\overline{BC}$. Die Spitze des Zeltes wird von einer Zeltstange gehalten, die rechtwinklig auf dem geneigten Erdboden steht.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes M.
Geben Sie einen Vektor an, der die Richtung der Zeltstange beschreibt.

e) Die dem Eingang gegenüberliegende Seite des Zeltes ist ein Dreieck ADP mit der Spitze $P(-0{,}8|-2{,}6|2{,}1)$. Die Strahlen der tief stehenden Sonne haben die Richtung $\vec{r}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}$ und werfen einen Schatten des Zeltes auf den schrägen Hang. Der Schatten der Spitze P fällt dabei auf den Punkt Q der Hangebene E.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q (Runden Sie auf 1 Nachkommastelle).



4) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 17)

Ein Designer entwirft mithilfe einer CAD-Software ein Dekorationsobjekt für ein Juweliergeschäft. Das Ausgangsmaterial für das Objekt ist ein Metallquader. Die Eckpunkte des Quaders sind im räumlichen Koordinatensystem:

$A(2|-2|0)$, $B(2|3|0)$, $C(-2|3|0)$, $D(-2|-2|0)$,
$E(2|-2|3)$, $F(2|3|3)$, $G(-2|3|3)$ und $H(-2|-2|3)$.

Dabei entspricht eine Längeneinheit im Koordinatensystem einem Zentimeter in der Realität (siehe Abbildung 27 in der Anlage).

Der Designer plant zunächst, aus dem gegebenen Quader eine Pyramide $ABCDS$ zu konstruieren, deren Spitze bei $S(0|0{,}5|3)$ liegt.

a) **Zeichnen** Sie die Pyramide in die Abbildung 27 in der Anlage ein.

b) **Zeigen** Sie, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck, aber kein Quadrat ist.

c) **Bestimmen** Sie die Ebenengleichung der Ebene E_1, in der das Dreieck ABS liegt.

d) **Bestimmen** Sie den Neigungswinkel des Dreiecks ABS gegenüber der Grundfläche der Pyramide.

e) **Beurteilen** Sie, ob die Kante $\overline{DS}$ die x_3-Achse schneidet.

f) Der Designer überlegt, an der unteren Kante $\overline{AB}$ einen kleinen Diamanten zu befestigen, der die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 2 : 3 aufteilt.
Bestimmen Sie die beiden möglichen Positionen des Diamanten.

g) Der Designer konstruiert mit seinem CAD-Programm aus dem Quader eine neue Pyramide mit rechteckiger Grundfläche, aber kleinerem Volumen. Die Kante $\overline{AD}$ lässt er gleich, die neue Pyramide hat eine Höhe von 2 cm und ein Volumen von 9 cm^3.
Bestimmen Sie die Koordinaten einer möglichen neuen Spitze und die beiden neuen Eckpunkte der Pyramidengrundfläche.

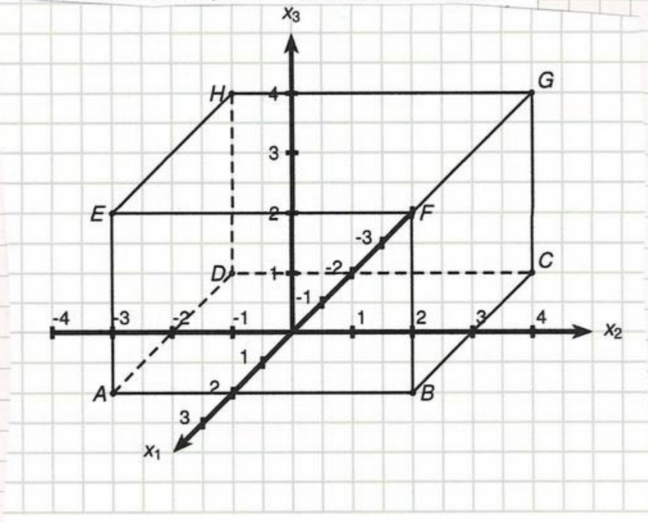


Abb. 27

5) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 18)

Der obere Teil des *One World Trade Center* in New York City ist ein Turm. Die Grundfläche dieses Turms lässt sich in einem kartesischen Koordinatensystem modellhaft durch das Quadrat $ABCD$ mit

$A(30{,}5|-30{,}5|0)$, $B(30{,}5|30{,}5|0)$, $C(-30{,}5|30{,}5|0)$ und $D(-30{,}5|-30{,}5|0)$

beschreiben (siehe Abbildung 28 in der Anlage).

Die Eckpunkte der quadratischen Deckfläche $PQRS$ des Turms haben die Koordinaten

$P(30{,}5|0|361)$, $Q(0|30{,}5|361)$, $R(-30{,}5|0|361)$ und $S(0|-30{,}5|361)$.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 1 m in der Realität.

a) **Zeichnen** Sie die Draufsicht des Turms, also die senkrechte Projektion in die x_1-x_2- Ebene. **Zeigen** Sie, dass die Eckpunkte der projizierten Deckfläche auf den Seiten der Grundfläche liegen.

b) Die Grund- und die Deckfläche des Turms sind durch ein umlaufendes Band von Dreiecken verbunden (siehe Abbildung 28 in der Anlage).
Bestätigen Sie, dass die Außenwand PBQ ein gleichschenkliges, aber kein gleichseitiges Dreieck ist.

c) Die Seitenfläche PBQ liegt in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung von E.

d) **Berechnen** Sie die Größe des Neigungswinkels der Wand PBQ gegenüber der Grundfläche des Turms.

e) **Bestimmen** Sie die Länge der Strecke $\overline{P_2Q_2}$ im Dreieck PBQ für $x_3 = 200$ (siehe Abbildung 28 in der Anlage).

f) Die Kante $\overline{AP}$ liegt auf einer Geraden g_1 und die Kante $\overline{CR}$ liegt auf einer Geraden g_2.
Begründen Sie, dass die Geraden g_1 und g_2 windschief zueinander liegen.

Anlage zur Aufgabe „One World Trade Center“

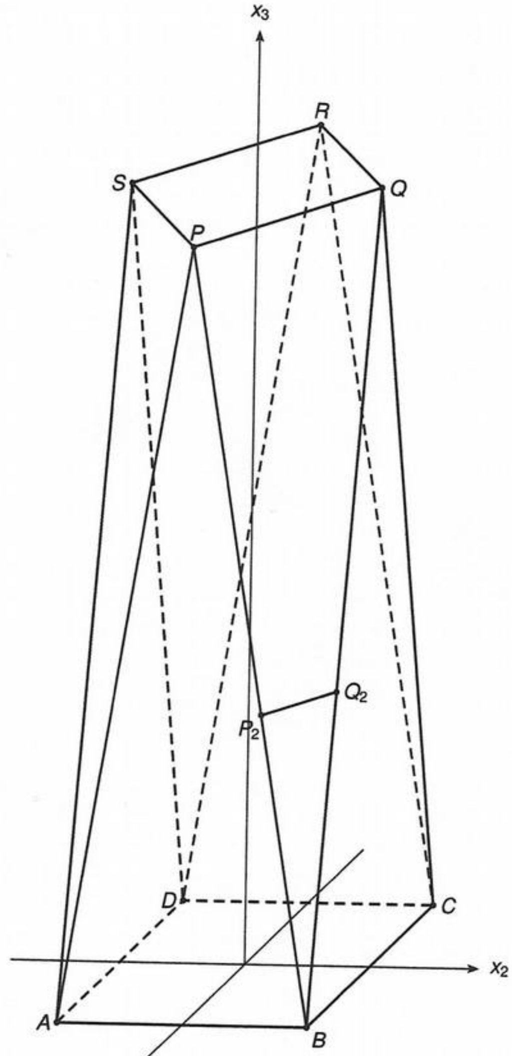


Abb. 28: Das Schrägbild des Turmes. Die Skizze ist nicht maßstabsgetreu.

6) (Abitur Bayern 2018)

Auf einem Spielplatz wird ein dreieckiges Sonnensegel errichtet, um einen Sandkasten zu beschatten. Hierzu werden an drei Ecken des Sandkastens Metallstangen im Boden befestigt, an deren Enden das Sonnensegel fixiert wird.

In einem kartesischen Koordinatensystem stellt die x_1x_2-Ebene den horizontalen Boden dar. Der Sandkasten wird durch das Rechteck mit den Eckpunkten $K_1(0|4|0)$, $K_2(0|0|0)$, $K_3(3|0|0)$ und $K_4(3|4|0)$ beschrieben. Das Sonnensegel wird durch das ebene Dreieck mit den Eckpunkten $S_1(0|6|2{,}5)$, $S_2(0|0|3)$ und $S_3(6|0|2{,}5)$ dargestellt (vgl. Abbildung 1). Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

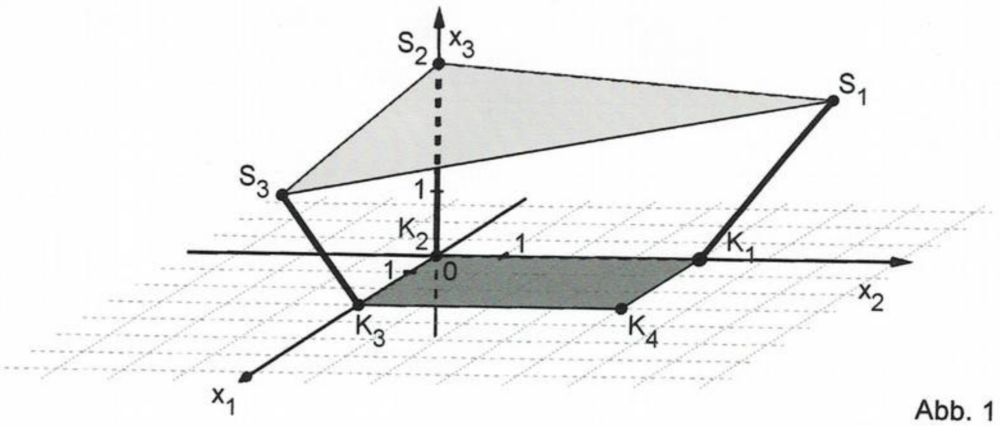


Abb. 1

Die drei Punkte S_1, S_2 und S_3 legen die Ebene E fest.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E

b) Der Hersteller des Sonnensegels empfiehlt, die verwendeten Metallstangen bei einer Sonnensegelfläche von mehr als $20\,m^2$ durch zusätzliche Sicherungsseile zu stabilisieren. Beurteilen Sie, ob eine solche Sicherung aufgrund dieser Empfehlung in der vorliegenden Situation nötig ist.

Auf das Sonnensegel fallen Sonnenstrahlen, die im Modell und in der Abbildung 1 durch parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{S_1K_1}$ dargestellt werden können. Das Sonnensegel erzeugt auf dem Boden einen dreieckigen Schatten. Die Schatten der mit S_2 bzw. S_3 bezeichneten Ecken des Sonnensegels werden mit S_2' bzw. S_3' bezeichnet.

c) Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass S_2' auf der x_2-Achse liegt.

d) S_3' hat die Koordinaten $(6|-2|0)$. Zeichnen Sie das Dreieck, das den Schatten des Sonnensegels darstellt, in Abbildung 1 ein. Entscheiden Sie anhand der Zeichnung, ob mehr als die Hälfte des Sandkastens beschattet ist.

e) Um das Abfließen von Regenwasser sicherzustellen, muss das Sonnensegel einen Neigungswinkel von mindestens 8° gegenüber dem horizontalen Boden aufweisen. Begründen Sie, dass das Abfließen von Regenwasser im vorliegenden Fall nicht sichergestellt ist.

f) Bei starkem Regen verformt sich das Sonnensegel und hängt durch. Es bildet sich eine sogenannte Wassertasche aus Regenwasser, das nicht abfließen kann. Die Oberseite der Wassertasche verläuft horizontal und ist näherungsweise kreisförmig mit einem Durchmesser von 50 cm. An ihrer tiefsten Stelle ist die Wassertasche 5 cm tief. Vereinfachend wird die Wassertasche als Kugelsegment betrachtet (vgl. Abbildung 2).

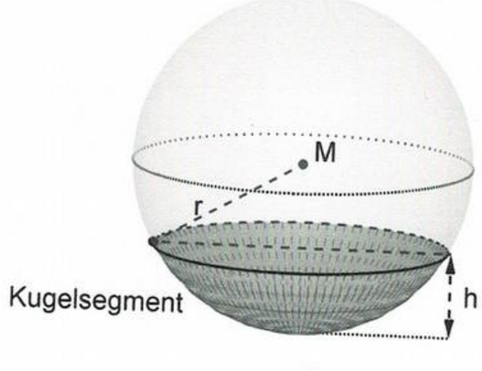


Abb. 2

Das Volumen V eines Kugelsegments kann mit der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h^2 \cdot (3r - h)$ berechnet werden, wobei r den Radius der Kugel und h die Höhe des Kugelsegments bezeichnen. Ermitteln Sie, wie viele Liter Wasser sich in der Wassertasche befinden.