AUFGABEN (HILFSMITTELFREIER TEIL)

1) Gegeben seien die Punkte A(1/0/0), B(1/2/1) und C(3/1/1). Sie liegen in einer Ebene E.

a) Bestimme eine Gleichung für die Ebene E.

b) Bestimme den Normalenvektor der Ebene E.

c) Gib die Gleichung einer beliebigen Gerade an, welche E rechtwinklig schneidet.

d) Bestimme, ob der Punkt D(5/2/2) auf der Ebene liegt.

e) Gegeben sei zusätzlich die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt von g und E.

f) Bestimme rechnerisch einen Punkt P auf der in Teil e genannten Geraden g, der 3 Längeneinheiten vom Aufpunkt der Geraden entfernt ist.

2) Gegeben sei das Viereck ABCD mit A(3/0/0), B(3/6/0), C(0/6/4) und D(0/0/4).

a) Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem.

b) Zeige rechnerisch, dass es sich um ein Rechteck handelt.

c) Das Viereck liegt in einer Ebene E. Bestimme eine Gleichung für die Ebene E.

d) Gegeben sei der Punkt $E(6/0/-4)$.
Bestimme, ob sich der Punkt E in der Ebene E befindet.
Bestimme, ob sich der Punkt E im Viereck $ABCD$ befindet.

e) Gib die Gleichung einer beliebigen Gerade an, die die Ebene E rechtwinklig schneidet.

3) Gegeben sei das Viereck $ABCD$ mit $A(2|1|1)$, $B(3|5|2)$, $C(0|5|4)$ und $D(-1|1|3)$.

a) Zeige, dass es sich um ein Parallelogramm handelt.

b) Bestimme, ob es sich zugleich um ein Rechteck handelt.

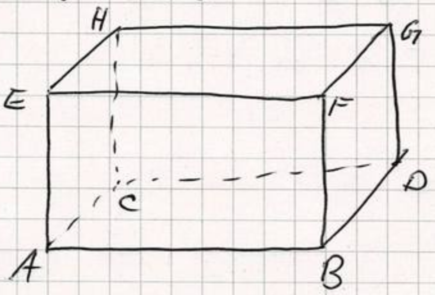
c) Gib mit Hilfe einer Skizze an, wo sich der Winkel befindet, der mit der folgenden Rechnung bestimmt werden kann:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DA}|}$$

d) Gegeben seien die Diagonalen des Vierecks $ABCD$. Bestimme, ob sich diese Diagonalen rechtwinklig schneiden.

(Hinweis: Es darf vorausgesetzt werden, dass sie sich schneiden.)

4) Gegeben sei der Quader ABCDEFGH



Bekannt sind die folgenden Koordinaten:
A(8/0/0), B(8/10/0), D(0/0/0), H(0/0/8)
und F (8/10/8).

a) Bestimme die Koordinaten von C, E und G.

b) Bestimme die Koordinaten der Mittelpunkte der Flächen ABCD und ACHE

c) Bestimme die Koordinaten des räumlichen Mittelpunkts des Quaders.

d) Bestimme das Volumen des Quaders.

e) Gib mit Hilfe einer Skizze an, wo sich der Winkel befindet, den man mit der folgenden Rechnung bestimmen kann:

$$\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{EA} \circ \overrightarrow{EB}}{|\overrightarrow{EA}| \cdot |\overrightarrow{EB}|}$$

f) Bestimme rechnerisch, ob es einen Schnittpunkt der Geraden g (die durch A und G verläuft) und h (die durch H und B verläuft) gibt.

5) Löse das folgende lineare Gleichungssystem rechnerisch:

a)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 6 \\ \text{II.}\quad & x - 2y + 2z = 3 \\ \text{III.}\quad & 2x - y + 3z = 9 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 3 \\ \text{II.}\quad & 2x - y + 2z = 3 \\ \text{III.}\quad & 2x - 2y - z = -1 \end{aligned}$$

6) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 39)

Betrachtet wird der abgebildete Würfel *ABCDEFGH*. Die Eckpunkte *D*, *E*, *F* und *H* dieses Würfels besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die folgenden Koordinaten: $D(0|0|-2)$, $E(2|0|0)$, $F(2|2|0)$ und $H(0|0|0)$.

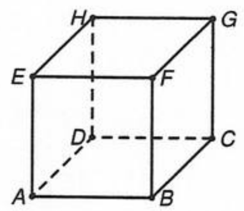


Abb. 20

a) Zeichnen Sie in die Abbildung 20 die Koordinatenachsen ein und bezeichnen Sie diese. **Geben** Sie die Koordinaten des Punktes *A* **an.**

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $P(1{,}5|1{,}5|-0{,}5)$ auf der Geraden liegt, welche durch die Punkte *F* und *D* geht.

7) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 41)

Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|-2)$, $B(1|2|-1)$ und $C(1|1|4)$ sowie für eine reelle Zahl d der Punkt $D(d|1|4)$.

a) **Zeigen** Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind, und **geben** Sie eine Gleichung der Ebene **an**, in der dieses Dreieck liegt.

b) Das Dreieck ABD ist im Punkt B rechtwinklig.
Ermitteln Sie den Wert von d.

8) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 42)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$2 \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

a) **Bestimmen** Sie r.

b) Gegeben sind die Punkte $A(-2|1|4)$, $B(-4|0|6)$ und $C(3|-10|8)$ im kartesischen Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist mit rechtem Winkel in B.

9) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 43)

Gegeben sind der Punkt $P(-3|2|1)$, die Gerade $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie für eine reelle Zahl a der Punkt $Q(0|a|0)$. Die Strecke $\overline{PQ}$ steht senkrecht zu g.

a) **Bestimmen** Sie den Wert von a.

b) Zwei Werte r_1 und r_2 des Parameters r liefern die Ortsvektoren zweier Punkte R_1 und R_2 der Geraden g.
Geben Sie alle Wertepaare $(r_1; r_2)$ an, für die R_1 und R_2 den gleichen Abstand vom Punkt Q haben.
Begründen Sie Ihre Angabe.

10) (Aufgabensammlung Hamburg Nr. 44)

Gegeben sind die Punkte $A(-4|5|2)$, $B(8|-1|14)$ und $C(-2|9|4)$. Sie bestimmen eindeutig eine Ebene ε.

a) Der Punkt $D(-14|15|-8)$ bildet mit A, B und C ein Parallelogramm $ABCD$.
S ist der Schnittpunkt der Parallelogrammdiagonalen.
Bestimmen Sie den Vektor $\overrightarrow{AS}$.

b) Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ ist $M(2|2|8)$.
Zur Strecke $\overline{AB}$ wird in der Ebene ε ein Thaleskreis geschlagen.
Zeigen Sie, dass C auf diesem Thaleskreis liegt.

11) Gib die Gleichungen von drei beliebigen Ebenen an, die sich paarweise jeweils in einer Schnittgeraden schneiden. Es soll keinen Schnittpunkt für alle drei Ebenen geben.