LÖSUNGEN (TEIL B)

1a) $\vec{OP} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + 15 \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}75\\105\\90\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}79\\106\\96\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P(79/106/96)$

b) $\begin{pmatrix}129\\176\\156\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}125\\175\\150\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$

$\Rightarrow r = 25$

$\Rightarrow$ Das Raumschiff erreicht den Punkt um 10:25 Uhr

c) zurückgelegter Weg in 15 min (mit den Werten von Teil a):

$\vec{P_1P} = \begin{pmatrix}79-4\\106-1\\96-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}75\\105\\90\end{pmatrix}$ (P_1 sei der Aufpunkt)

$|\vec{P_1P}| = \left|\begin{pmatrix}75\\105\\90\end{pmatrix}\right| = \sqrt{75^2 + 105^2 + 90^2} \approx 157{,}32$ km

$\cdot 4$ 15 min —— 157,32 km $\cdot 4$

60 min —— 629,29 km

Antwort: Es sind 629,29 km/h

d) Ort, wo das Raumschiff um 10:10 ist:

$$\overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}50\\70\\60\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}54\\71\\66\end{pmatrix}$$

Abstand dieses Punktes von B:

$$\overrightarrow{BP_2} = \begin{pmatrix}54-0\\71-1\\66-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}54\\70\\60\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BP_2}| = \sqrt{54^2 + 70^2 + 60^2} \approx 106{,}85\ km$$

Antwort: Es sind 106,85 km.

e) Alle Punkte der Flugbahn lassen sich beschreiben mit: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}4\\1\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+5r\\1+7r\\6+6r\end{pmatrix}$

Abstand von X zu B:

$$\overrightarrow{BX} = \begin{pmatrix}4+5r-0\\1+7r-1\\6+6r-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+5r\\7r\\6r\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{BX}| = \left|\begin{pmatrix}4+5r\\7r\\6r\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(4+5r)^2 + (7r)^2 + (6r)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 40r + 25r^2 + 49r^2 + 36r^2}$$
$$= \sqrt{110r^2 + 40r + 16}$$

gesuchter Abstand: 1000 km

$$|\overrightarrow{BX}| = 1000$$
$$\sqrt{110r^2 + 40r + 16} = 1000 \quad |()^2$$
$$110r^2 + 40r + 16 = 1000000$$
$$110r^2 + 40r - 999.984 = 0$$

(GTR...)

$r_1 = 95{,}164 \mathrel{\hat{=}} 1h\ 35\ min\ 10\ sek$

$r_2 = -95{,}527 \mathrel{\hat{=}} 1h\ 35\ min\ 32\ sek$

Antwort: Das Schiff tauchte um 08:24 Uhr auf dem Radarschirm auf und verschwand um 11:35 Uhr.

2 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-1 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\vec{AB}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\,LE$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 6-5 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|\vec{BC}| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} \approx 5{,}196\,LE$

$\vec{CD} = \begin{pmatrix} -3-(-1) \\ 2-6 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\vec{CD}| \approx 4{,}47\,LE$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 2-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|\vec{AD}| \approx 5{,}196\,LE$

b) $\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-6}{\sqrt{540}}$

$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{540}}\right) \approx 104{,}96°$

$\cos\beta = \frac{\vec{BA} \circ \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{6}{\sqrt{540}}$

$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{540}}\right) \approx 75{,}04°$

$\cos\gamma = \frac{\vec{CD} \circ \vec{CB}}{|\vec{CD}| \cdot |\vec{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-6}{\sqrt{540}}$

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{540}}\right) \approx 104{,}96°$

$\cos\delta = \frac{\vec{DC} \circ \vec{DA}}{|\vec{DC}| \cdot |\vec{DA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{6}{\sqrt{540}}$

$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{540}}\right) \approx 75{,}04°$

c) Es gilt $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$

$\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow \vec{AD} \parallel \vec{BC}$

Es handelt sich daher um ein Parallelogramm.

d)
$$A = |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$
$$= \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2+20 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \left| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 22 \end{pmatrix} \right|$$
$$= \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 22^2}$$
$$= \sqrt{504} \approx 22,45 \text{ FE}$$

$$\begin{array}{cc} 2 & -5 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{array}$$

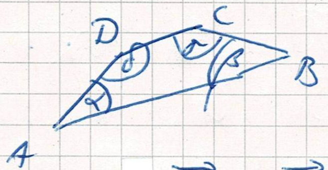
e)
$$A = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AD}|$$
$$\approx \frac{1}{2} \cdot 22,45$$
$$= 11,225 \text{ FE}$$

3a)
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-0 \\ 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AB}| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56} \text{ LE}$$
$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 2-1 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{DC}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \text{ LE}$$
$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-0 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{AD}| = \sqrt{3} \text{ LE}$$
$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 5-7 \\ 2-2 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \text{ LE}$$

Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ sind parallel zueinander, da $\vec{AB} = 2 \cdot \vec{DC}$

$\Rightarrow$ ABCD ist ein Trapez

b)



$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\circ\vec{AD}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{168}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{168}}\right) \approx 22{,}21°$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\circ\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-6\\-2\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{280}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{280}}\right) \approx 17{,}02°$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{CB}\circ\vec{CD}}{|\vec{CB}|\cdot|\vec{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-8}{\sqrt{70}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{70}}\right) \approx 162{,}98°$$

$$\cos\delta = \frac{\vec{DC}\circ\vec{DA}}{|\vec{DC}|\cdot|\vec{DA}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{42}}$$

$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{42}}\right) \approx 157{,}79°$$

c) $\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA}$

$$= \begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow D(-1/0/1)$

4a) Die Pyramide ist gerade ⇒
Die Spitze befindet sich genau über der Mitte des Quadrats ABCD.
Das Quadrat ABCD muss in der xy-Ebene liegen, da A und D die z-Koordinate 0 haben und die z-Koordinate von E genau der Höhe des Stumpfs entspricht.
(Wenn die Pyramide „gekippt" wäre und ABCD sich nicht in der xy-Ebene befände, so müsste E einen anderen z-Wert haben.

A(6/0/0)

B(6/6/0) da die Kante $\overline{AB}$ parallel zur y-Achse verläuft und die Kantenlänge 6 ist

C(0/6/0) da die Kante $\overline{DC}$ auf der y-Achse liegt und 6 lang ist

D(0/0/0)

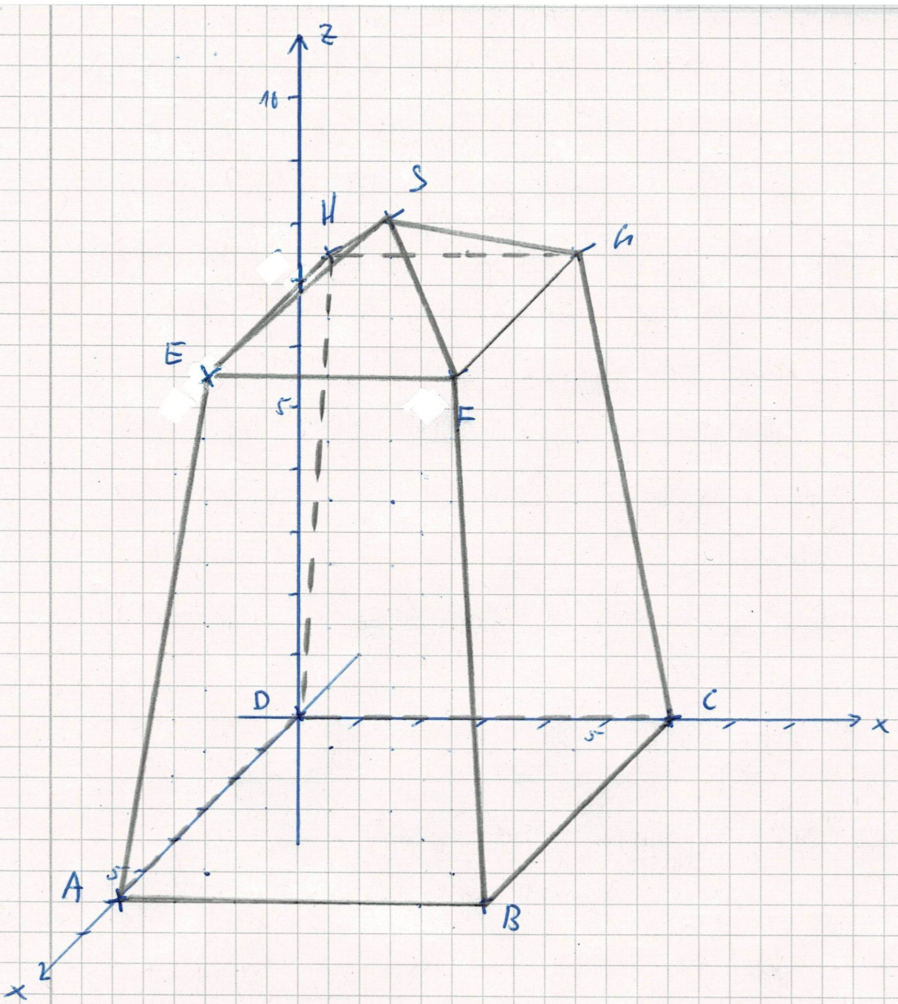
E(5/1/8)

F(5/5/8) da EFGH ein Quadrat mit Kantenlänge 4 ist und die Kanten parallel zur x- bzw. y-Achse sind

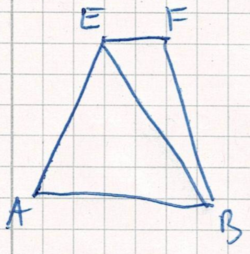
G(1/5/8) (analog)

H(1/1/8)

S(3/3/9,5) da M(3/3/0) die Mitte des unteren Quadrats ist & die Spitze 9,5 Einheiten darüber ist



b) Die Seitenflächen sind 4 gleich große Trapeze
Wir rechnen die Fläche von einem Trapez (ABEF) aus und vervierfachen das Ergebnis.



$A_{\text{Dreieck ABE}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AE}|$

$A_{\text{Dreieck BEF}} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{BE} \times \vec{BF}|$

$$A_{\text{Dreieck } ABE} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AE} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 6-6 \\ 6-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5-6 \\ 1-0 \\ 8-0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{matrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ 0 & 8 \\ 0 & -1 \\ 6 & 1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{48^2 + 6^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2340}}{2} \text{ dm}^2$$

$$A_{\text{Dreieck } BEF} = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{BF} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 5-6 \\ 1-6 \\ 8-0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5-6 \\ 5-6 \\ 8-0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{matrix} -1 & -1 \\ -5 & -1 \\ 8 & 8 \\ -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -40+8 \\ -8+8 \\ 1-5 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -32 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32^2 + 4^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1040}}{2} \text{ dm}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Trapez}} = \frac{\sqrt{2340}}{2} + \frac{\sqrt{1040}}{2} \approx 40{,}31 \text{ dm}^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Glas}} \approx 4 \cdot 40{,}31 \text{ dm}^2 = 161{,}24 \text{ dm}^2$$
$$= 1{,}6124 \text{ m}^2$$

c) Ein Objekt, dass über der Mitte steht, ist von den Eckpunkten unten immer gleich weit entfernt. Es genügt also, einen Eckpunkt zu nehmen.

P(3/3/z) ... ein Punkt über der Mitte

Abstand von P zur Spitze S

Abstand von P zum Eckpunkt D

$$|\overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{PD}|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-3 \\ 9{,}5-z \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-3 \\ 0-z \end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9{,}5-z \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -z \end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{(9{,}5-z)^2} = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-z)^2}$$

$$\sqrt{(9{,}5-z)^2} = \sqrt{9+9+z^2}$$

$$\sqrt{(9{,}5-z)^2} = \sqrt{18+z^2} \quad |()^2$$

$$(9{,}5-z)^2 = 18+z^2 \quad |\text{Bin. Formel}$$

$$90{,}25-19z+z^2 = 18+z^2 \quad |-z^2$$

$$90{,}25-19z = 18 \quad |-90{,}25$$

$$-19z = -72{,}25 \quad |:(-19)$$

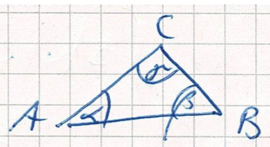
$$\underline{z \approx 3{,}80}$$

5)a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2+4^2+3^2} = 13$ LE

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+3^2+12^2} = 13$ LE

$\Rightarrow$ gleichschenkliges Dreieck

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-12 \\ 3-4 \\ 12-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2+(-1)^2+9^2} = \sqrt{146}$ LE



$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\circ\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}}{13\cdot 13} = \frac{96}{169}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{96}{169}\right) \approx 55{,}39°$$

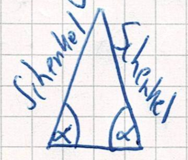
$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\circ\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-12\\-4\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-8\\-1\\9\end{pmatrix}}{13\cdot\sqrt{146}} = \frac{73}{13\sqrt{146}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{73}{13\cdot\sqrt{146}}\right) \approx 62{,}31°$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 62{,}3°$$

(ohne Runden 62,31°)

α und γ sind Basiswinkel. Basiswinkel sind im gleichschenkl. Dr. gleich groß



b) Gerade durch A und B:

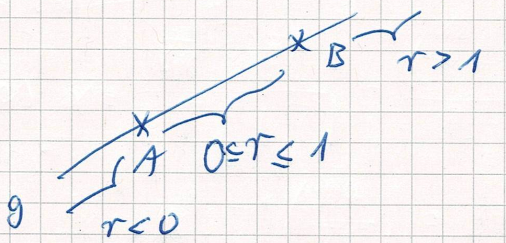
$$g: \vec{x} = \vec{OA} + r\cdot\vec{AB} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$$

$D(4|\frac{4}{3}|1)$

$$\begin{pmatrix}4\\4/3\\1\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

Da $0 \le r \le 1$ liegt D nicht nur auf der Geraden durch A & B, sondern auch auf der Strecke zwischen A und B.



c) $\vec{CB} = r \cdot \vec{CD} + s \cdot \vec{CA}$

$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ -11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 8 = \quad -4s$

$1 = -\frac{5}{3} r - 3s$

$-9 = -11r - 12s$

Aus $8 = -4s$ folgt: $\underline{s = -2}$

$\Rightarrow \quad 1 = -\frac{5}{3} r - 3 \cdot (-2)$

$1 = -\frac{5}{3} r + 6$

$-5 = -\frac{5}{3} r$

$\frac{1}{3} = r$

und

$-9 = -11r - 12 \cdot (-2)$

$-9 = -11r + 24$

$-33 = -11r$

$\underline{\frac{1}{3} = r}$

Alternative: I. $8 = -4s$

II. $1 = -5/3\, r - 3s$

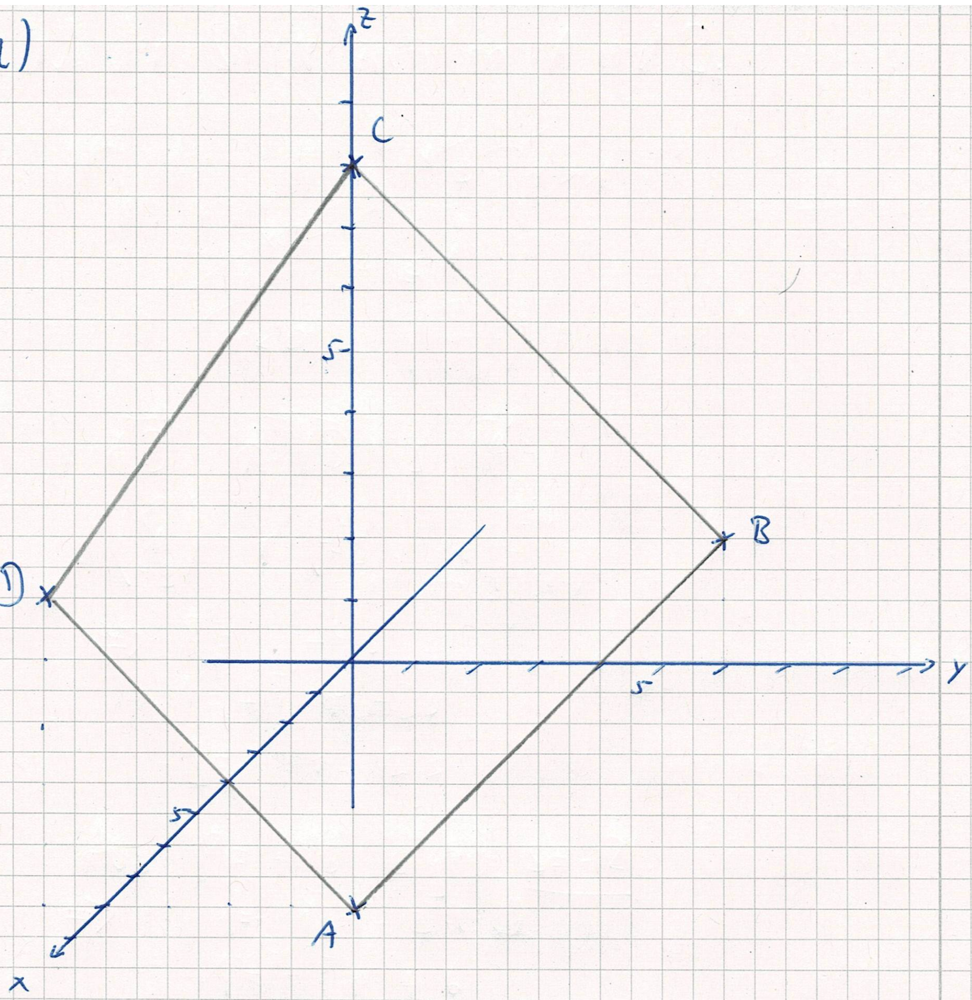
III. $-9 = -11r - 12s$

GTR...

$s = -2$

$r = \frac{1}{3}$

6a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-8 \\ 6-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72}$ LE

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-6 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$ LE

$\Rightarrow$ Dreieck gleichschenklig

$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$, rechter Winkel bei B

$\Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ -1-4 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

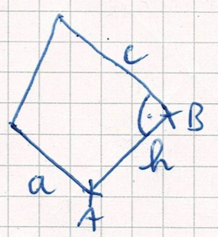
$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-(-1) \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{BC} = \frac{6}{5} \cdot \vec{AD}$

$\Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD}$

$\Rightarrow$ Trapez

d)



Weil bei B ein rechter Winkel ist, kann man die Höhe schnell angeben:
$h = |\vec{AB}|$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(|\vec{AD}| + |\vec{BC}| \right) \cdot |\vec{AB}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \right) \cdot \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{50} + \sqrt{72} \right) \cdot \sqrt{72} \\ &= 66 \text{ FE} \end{aligned}$$

Alternative: Trapez in 2 Dreiecke zerlegen und Kreuzprodukt verwenden (wie bei 4b)

7 B1 a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 10-4 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ 11-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 11-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$ parallel

$\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AB}$ "

$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$ rechte Winkel

$\Rightarrow$ Rechteck

b) E befindet sich genau über A
(nur bezüglich der z-Koordinate 5 LE höher)
$\Rightarrow$ F hat dasselbe Verhältnis zu B

$F(10|8|5)$

c) $V_{Prisma} = G \cdot h$

G: Grundfläche Dreieck BCF $= A_{Dreieck}$
h: räuml. Höhe, hier $h = |\vec{AB}|$

$\vec{BF}$ ist senkrecht zu $\vec{BC}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

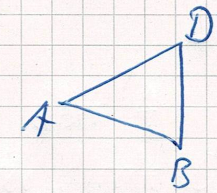
$\Rightarrow$ Wir können auf das Kreuzprodukt verzichten und $A_{Dreieck}$ einfacher ausrechnen:

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BF}|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2+3^2} \cdot 5$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5$$
$$= 12{,}5 \text{ FE}$$

$$V = 12{,}5 \cdot |\overrightarrow{AB}|$$
$$= 12{,}5 \cdot \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$
$$= 12{,}5 \cdot \sqrt{6^2+8^2}$$
$$= 12{,}5 \cdot 10$$
$$\underline{= 125 \text{ VE}}$$

7B2 a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 \neq 0$$
$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 33 \neq 0$$
$$\overrightarrow{DB} \circ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Kein rechter Winkel vorhanden

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right|$$

$$\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 4 & 1 \\ 6 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{array}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}12-6\\-12-3\\1+8\end{pmatrix}\right|$$

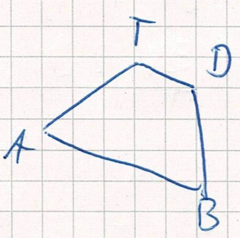
$$= \frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}6\\-15\\9\end{pmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{6^2+(-15)^2+9^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{342}$$

$$\approx 9{,}25 \text{ FE}$$

b)



$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BA}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\-6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\,(0{,}5/1/1)$$

c) $g_1: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$

$g_2: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + s\cdot\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$

Test, ob S auf beiden Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix}3{,}5\\4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r = 0{,}5$$

$$\Rightarrow S \in g_1$$

$$\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s = 0{,}5$$

$$\Rightarrow S \in g_2$$

$\Rightarrow$ Behauptung