LÖSUNGEN (Teil A)

1a) B (3/8/0)

x-Koordinate wie A
y- " wie C
z- " wie A

E (3/0/4)

x-Koordinate wie A
y- " wie A
z- " wie H

F (3/8/4)

x-Koordinate wie A
y- " wie C
z- " wie H

b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

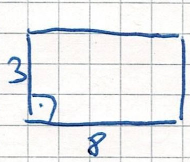
$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$

(rechter Winkel)

c) $|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 8$ LE

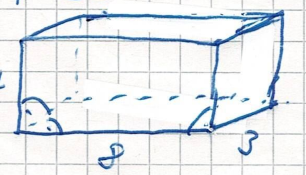
$|\vec{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 3$ LE

d) $A = 3 \cdot 8 = 24$ FE



e) $|\overrightarrow{AE}| = \left|\begin{pmatrix} 3-3 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 4 \text{ LE}$

$V = 3 \cdot 8 \cdot 4 = 96 \text{ VE}$



f) $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC}$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_1 (1{,}5 / 4 / 0)$

g) $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

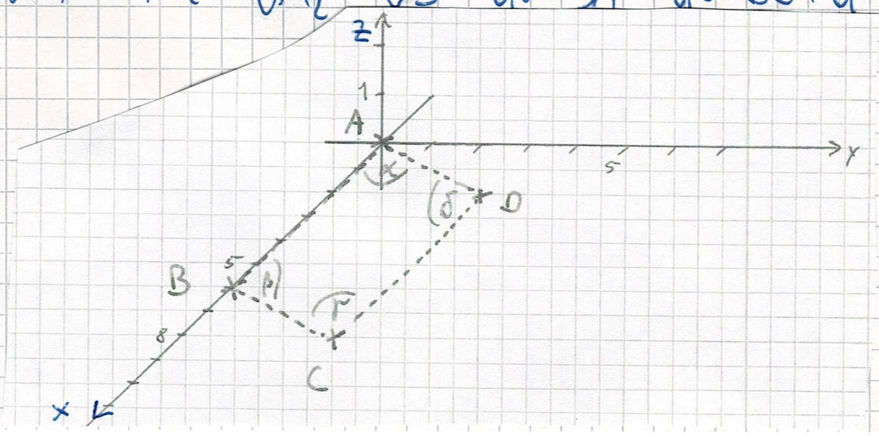
$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_2 (1{,}5 / 4 / 2)$

Alternative: $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH}$

2a)



b) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{BC} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{AD} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$, $\vec{CD} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$

zu α: $\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha \neq 90°$

zu β: $\vec{BA} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \beta \neq 90°$

zu δ: $\vec{DA} \circ \vec{DC} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \delta \neq 90°$

zu γ: $\vec{CB} \circ \vec{CD} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \gamma \neq 90°$

c) $\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{DC} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren sind Vielfache voneinander

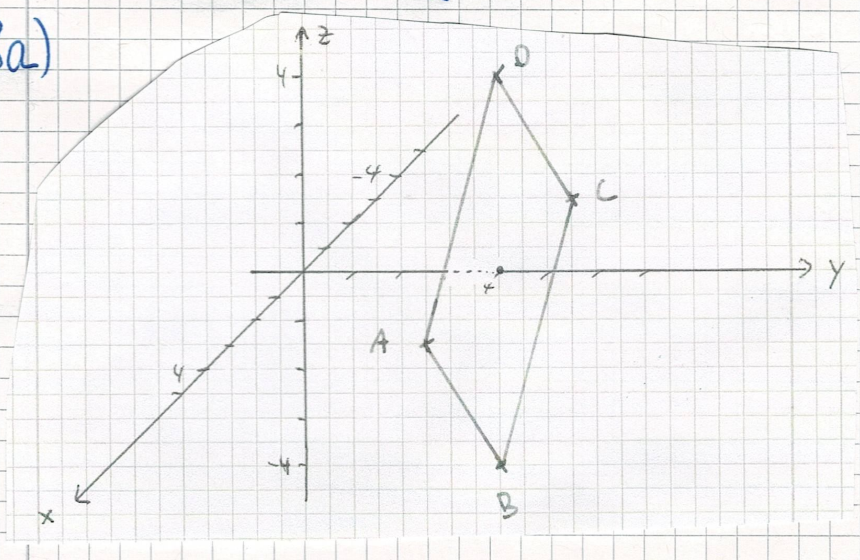
$\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$

d) Es gilt: $\vec{BC}$ und $\vec{AD}$ sind auch Vielfache voneinander

$\Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD}$

$\Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm (aber nicht zugleich ein Rechteck)

3a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-4 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-4 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = 5$ LE

$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 5$ LE

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 9-16 = -7 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel bei A

Es handelt sich um eine Raute. Die Seiten sind nämlich alle gleich lang und die gegenüberliegenden Seiten sind parallel zueinander. Es ist kein Quadrat, da ansonsten der Winkel bei A 90° groß hätte sein müssen.

4) $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-3 \\ 9-4 \\ 7-1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{AB}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

$g: \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BA}$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

5a) $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$ $\Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$

$\Rightarrow$ ABCD Parallelogramm

b) Wir testen, ob es einen rechten Winkel gibt.

$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -3+2 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel bei A

$\Rightarrow$ kein Rechteck

c) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

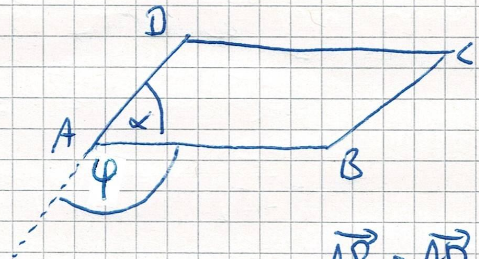
$= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

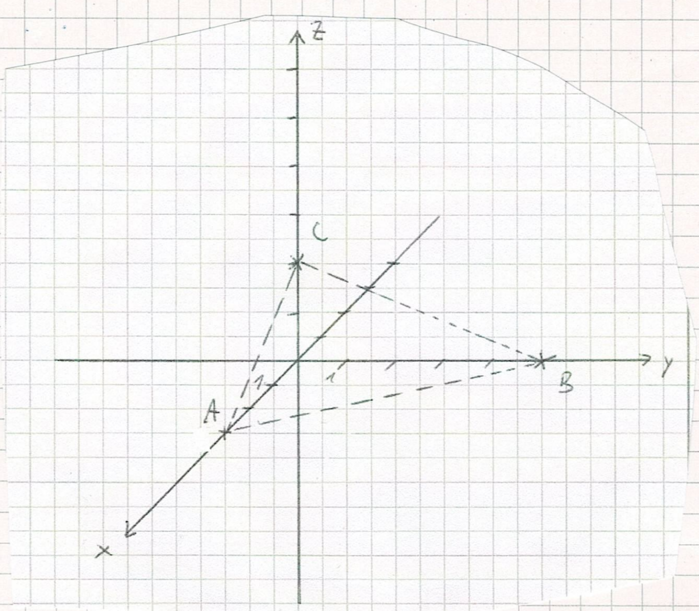
d)



Es gilt: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}$

Wenn ein Vektor durch seinen Gegenvektor ersetzt wird, so erhält man den Nebenwinkel von α.

6a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Winkel bei A: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$

" " B: $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 25 \neq 0$

" " C: $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel vorhanden

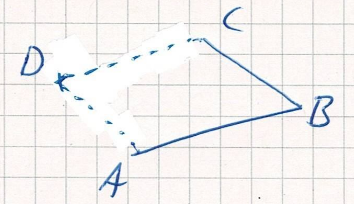
$\Rightarrow$ kein rechtwinkliges Dreieck

c) $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ LE

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ LE

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ LE

$\Rightarrow$ Kein gleichschenkliges Dreieck d)



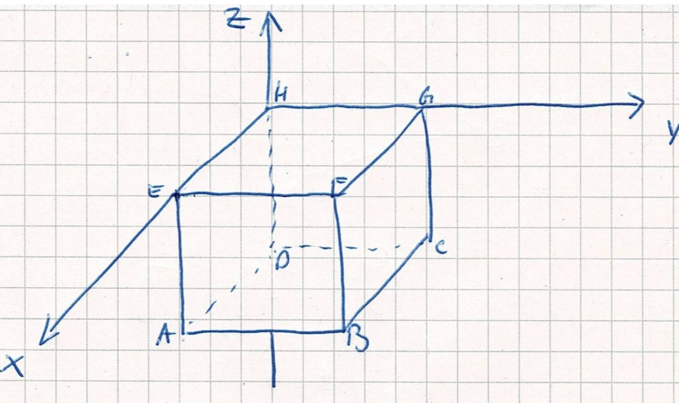
$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow D\,(3 / -5 / 2)$$

7)
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$
$$5x + 2 - 6 = 0$$
$$5x - 4 = 0$$
$$5x = 4$$
$$\underline{x = 0{,}8}$$

8) a) H hat die Koordinaten (0/0/0)
→ H ist der Koordinatenursprung

E liegt auf der x-Achse, da es 0 als y- und z-Koordinate hat

D liegt auf der z-Achse, da es 0 als x- und y-Koordinate hat



$A(2/0/-2)$

x-Koordinate wie E
y- " " D
z- " " D

b) $g: \vec{x} = \overrightarrow{OF} + r \cdot \overrightarrow{FD}$

$$= \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0-2\\0-2\\-2-0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$P(1{,}5/1{,}5/-0{,}5)$

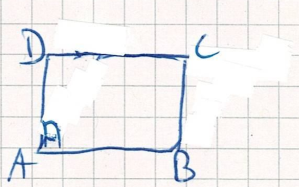
$$\begin{pmatrix}1{,}5\\1{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix} \quad \Big| -\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r = \frac{1}{4}$

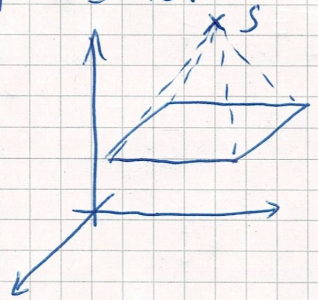
$\Rightarrow P \in g$ (P liegt auf g)

9a)



$$A = |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|$$
$$= \left|\begin{pmatrix} 6-3 \\ 7-3 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2-6 \\ 10-7 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{25}$$
$$= 5 \cdot 5$$
$$= 25 \text{ FE}$$

b) Die Punkte haben alle die z-Koordinate z=4. Das Quadrat liegt also parallel zur xy-Ebene.



Wir brauchen einen Punkt, der sich über dem Quadrat befindet. Sein Abstand vom Quadrat kann schnell bestimmt werden, indem man von seiner z-Koordinate 4 abzieht. Dieser Abstand ist die Höhe der Pyramide.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$
$$50 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot h$$
$$50 = \frac{25}{3} \cdot h \quad \left| \cdot \frac{3}{25}\right.$$
$$6 = h$$

$$\Rightarrow S(x/y/6+4)$$
$$S(x/y/10)$$

Als x- und y-Wert kann man im Grunde alles nehmen. Das Beste ist, wenn der Punkt über dem Quadrat ist:

Mitte des Quadrats: $\vec{OM} = \vec{OA} + 0{,}5 \cdot \vec{AB} + 0{,}5 \cdot \vec{BC}$

$$= \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1{,}5\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1{,}5\\1{,}5\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}3\\6{,}5\\4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow M\ (3/6{,}5/4)$

$\Rightarrow S\ (3/6{,}5/10)$

10) a)

$$2 \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix}-6\\2\\11\end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\11\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r = 0{,}5$

b)

$$\vec{BA} = \begin{pmatrix}-2-(-4)\\1-0\\4-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \qquad \vec{BC} = \begin{pmatrix}3-(-4)\\-10-0\\8-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-10\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}7\\-10\\2\end{pmatrix} = 14 - 10 - 4 = 0$$

$\Rightarrow$ rechter Winkel bei B

$\Rightarrow$ rechtw. Dreieck