Lösungen

1a) $f(0) = 12$

Die Kultur bedeckt $12\ cm^2$.

b) $\left(1+\frac{p}{100}\right)^x = 1{,}2^x$

$1+\frac{p}{100} = 1{,}2 \quad |-1$

$\frac{p}{100} = 0{,}2 \quad |\cdot 100$

$p = 20$

Es sind 20 %.

c) $f(4{,}5) = 12 \cdot 1{,}2^{4{,}5} \approx 27{,}26$

Es sind ca. $27{,}26\ cm^2$.

d) $f(-1) = 12 \cdot 1{,}2^{-1} = 10$

Es waren $10\ cm^2$.

e) $f(x) = 20$

$12 \cdot 1{,}2^x = 20 \quad |:12$

$1{,}2^x = \frac{5}{3} \quad |\log$

$x = \log_{1{,}2}\left(\frac{5}{3}\right)$

$x = 2{,}8017...$

$x \approx 2{,}8$

$2{,}8 \mathrel{\hat{=}} 2{,}8$ Stunden

$\mathrel{\hat{=}} 2$ Stunden $+ 0{,}8$ Stunden

$0{,}8$ Stunden $= 60 \cdot 0{,}8$ Minuten

$= 48$

Die Kultur hat um ca. 12:48 Uhr eine Größe von $20\,cm^2$.

f) $f(x) = 24$

$12 \cdot 1{,}2^x = 24 \quad | :12$

$1{,}2^x = 2 \quad | \log$

$\log_{1,2}(2) = x$

$3{,}80178\ldots = x$

$3{,}8 = x$

$3{,}8 \mathrel{\hat{=}} 3{,}8$ Stunden

$\mathrel{\hat{=}} 3$ Stunden $+ 48$ min (siehe e)

Die Kultur braucht 3 Stunden 48 min für eine Verdopplung.

g) $f(5) = 12 \cdot 1{,}2^5 = 29{,}85984$

10 cm² werden vernichtet:
neuer Bestand = $19{,}85984$ cm²

① neue Funktion:

$g(x) = 19{,}85984 \cdot 1{,}2^x$, x: Zeit in Stunden ab 15 Uhr

$g(2) = 19{,}85984 \cdot 1{,}2^2 = 28{,}5981...$
$= 28{,}60$

Um 17 Uhr beträgt die Größe ≈ 28,6 cm².

⑪ $29{,}85984 = 19{,}85984 \cdot 1{,}2^x \quad | : 19{,}85984$

$1{,}5035 = 1{,}2^x \quad | \log$

$\log_{1,2}(1{,}5035) = x$

$x \approx 2{,}23668...$

$x \approx 2{,}24$

2,24 ≙ 2,24 Stunden
≙ 2 Stunden + 0,24 Stunden
≙ 2 Stunden + $0{,}24 \cdot 60$ min
≙ 2 Stunden + 14,4 min

Die alte Größe wird um ≈ 17:14 Uhr wieder erreicht.

2) a) $f(x) = 28 \cdot 3^x$

b) $75 \text{ min} \hat{=} 60 \text{ min} + 15 \text{ min}$

$\hat{=} 1 \text{ Stunde} + 0{,}25 \text{ Stunden}$

$= 1{,}25 \text{ St.}$

$f(1{,}25) = 28 \cdot 3^{1{,}25} \approx 110{,}55$

Es sind $110{,}55 \text{ cm}^2$.

c) $f(-2) = 28 \cdot 3^{-2} = 3{,}\bar{1}$

Es waren $3{,}\bar{1} \text{ cm}^2$.

d) $f(x) = 100$

$28 \cdot 3^x = 100 \quad | :28$

$3^x = \frac{25}{7} \quad | \log$

$\log_3\left(\frac{25}{7}\right) = x$

$1{,}1587... = x$

$1{,}16 \approx x$

$1{,}16 \hat{=} 1{,}16 \text{ Stunden}$

$\hat{=} 1 \text{ Stunde} + 0{,}16 \cdot 60 \text{ min}$

$\hat{=} 1 \text{ Stunde} + 9{,}6 \text{ min}$

Sie erreicht nach ca. 1 Stunde und 10 min 100 cm^2.

e) $56 = 28 \cdot 3^x \quad | : 28$

$2 = 3^x \quad | \log$

$\log_3(2) = x$

$0{,}63092... = x$

$0{,}63 \approx x$

$0{,}63 \hat{=} 0{,}63$ Stunden

$\hat{=} 60 \cdot 0{,}63$ min

$= 37{,}8$ min

Es sind ca. 38 min.

f)

x	0	1	2
f(x)	28	?	84

$f(2) = 28 \cdot a^2 = 84$

$a^2 = 3$

$a = \sqrt{3}$

$a \approx 1{,}73$

$\Rightarrow f(x) = 28 \cdot 1{,}73^x$

oder

$f(x) = 28 \cdot \sqrt{3}^x$

3) a)

x	0	1
$f(x)$	21	35,7

$f(x) = b \cdot a^x$

$f(0) = 21 \Rightarrow f(x) = 21 \cdot a^x$

$f(1) = 35{,}7 \Rightarrow f(1) = 21 \cdot a = 35{,}7 \quad | :21$

$a = 1{,}7$

$\Rightarrow f(x) = 21 \cdot 1{,}7^x$

Probe: $f(2) = 21 \cdot 1{,}7^2 = 60{,}69$ ✓

$f(3) = 21 \cdot 1{,}7^3 = 103{,}173$ ✓

b) $f(0) = 21$

Die Größe betrug 21 cm².

c) $f(9) = 21 \cdot 1{,}7^9 = 2490{,}3454\ldots$

$\approx 2490{,}35$

Es sind $\approx 2490{,}35$ cm².

d) 20 min $\hat{=}$ $\frac{1}{3}$ Stunde

$f(\frac{1}{3}) = 21 \cdot 1{,}7^{\frac{1}{3}} = 25{,}0631\ldots$

$\approx 25{,}06$

Es sind $\approx 25{,}06$ cm².

e) $f(x) = 80$

$21 \cdot 1{,}7^x = 80 \quad | :21$

$1{,}7^x = 3{,}8095\ldots$

$1{,}7^x \approx 3{,}81 \quad | \log$

$x = \log_{1,7}(3,81)$

$x \approx 2,5208...$

$x \approx 2,52$

$2,52 \mathrel{\hat{=}} 2,52$ Stunden

$\mathrel{\hat{=}} 2$ Stunden $+ 0,52 \cdot 60$ min

$\mathrel{\hat{=}} 2$ Stunden $+ 31,2$ min

Die gesuchte Größe wird nach ≈ 2 h 31 min erreicht.

g) $42 = 21 \cdot 1,7^x \quad | :21$

$2 = 1,7^x \quad | \log$

$\log_{1,7}(2) = x$

$1,30627... = x$

$1,31 \approx x$

$1,31 \mathrel{\hat{=}} 1,31$ Stunden

$\mathrel{\hat{=}} 1$ Stunde $+ 0,31 \cdot 60$ min

$\mathrel{\hat{=}} 1$ Stunde $+ 18,6$ min

Die Kultur braucht ≈ 1 Stunde 19 min für eine Verdopplung.

3 j)

$$10 = 21 \cdot 1{,}7^x \quad | :21$$

$$\frac{10}{21} = 1{,}7^x \quad | \log$$

$$\log_{1,7}\left(\frac{10}{21}\right) = x$$

$$-1{,}398 = x$$

$$-1{,}398\,h = -(1\,h + 0{,}398 \cdot 60\,min)$$

$$-(1\,h + 23{,}88\,min)$$

Die 10 cm^2 wurden vor ca. 1h und 24 min erreicht.

h) halb so lange: $\frac{1,31}{2} = 0,655$

x	0	$0,655$
$f(x)$	21	42

$f(0) = 21 \Rightarrow f(x) = 21 \cdot a^x$

$f(0,655) = 42 \Rightarrow 21 \cdot a^{0,655} = 42$

$a^{0,655} = 2 \quad | \sqrt[0,655]{\ }$

$a = \sqrt[0,655]{2}$

$a = 2,881$

$\Rightarrow f(x) = 21 \cdot 2,881^x$

<u>Alternative:</u>

$0,655 \cdot 1,5267 = 1$

$a^{0,655} = 2 \quad | \text{hoch } 1,5267$

$(a^{0,655})^{1,5267} = 2^{1,5267}$

$a^1 = 2^{1,5267}$

$a = 2^{1,5267}$

$a = 2,881$

4) a) $f(x) = 9000 \cdot 1{,}012^x$

b) $f(6) = 9000 \cdot 1{,}012^6 = 9667{,}7538\ldots$
$\approx 9667{,}75$

Es sind $\approx 9667{,}75$ €.

c) $f(x) = 10.000$

$10.000 = 9000 \cdot 1{,}012^x \quad | :9000$
$1{,}\bar{1} = 1{,}012^x \quad | \log$

$\log_{1{,}012}(1{,}\bar{1}) = x$
$8{,}8326\ldots = x$
$8{,}83 \approx x$

Der Kontostand 10.000 € wird nach 8,83 Jahren erreicht.

d) $f(100) = 9000 \cdot 1{,}012^{100} = 29.668{,}37501$

Es sind ca. 29.668,38 €.

e)
$\frac{29.668{,}38}{9000} = 3{,}2964$

Es sind 229,64 %.

5) a) bei f: $f(0) = 12$

" g: $g(0) = 10$

Bei f sind es 12 cm², bei g 10 cm².

b) f: 30%

g: 50%

$1{,}3^2 = 1{,}69$

$1{,}5^2 = 2{,}25$

f bei 2 Stunden: 69%

g " " : 125%

c) $f(x) = 20$

$12 \cdot 1{,}3^x = 20 \quad | :12$

$1{,}3^x = \frac{5}{3} \quad | \log$

$x = \log_{1,3}(\frac{5}{3})$

$x = 1{,}9470...$

$x \approx 1{,}95$

$g(x) = 20$

$10 \cdot 1{,}5^x = 20 \quad | :10$

$1{,}5^x = 2 \quad | \log$

$\log_{1,5}(2) = x$

$1{,}70951... = x$

$1{,}71 \approx x$

$$1{,}95\ h = 1h + 0{,}95 \cdot 60\ min$$
$$= 1h + 57\ min$$

$$1{,}71h = 1h + 0{,}71 \cdot 60\ min$$
$$= 1h + 42{,}6\ min$$

Bei f werden $20\ cm^2$ um 12:57 Uhr erreicht, bei g um ≈12:43 Uhr.

d) $f(x) = g(x)$

$$12 \cdot 1{,}3^x = 10 \cdot 1{,}5^x \quad | :10$$

$$1{,}2 \cdot 1{,}3^x = 1{,}5^x \quad | : 1{,}3^x$$

$$1{,}2 = \frac{1{,}5^x}{1{,}3^x} \quad | \text{Potenzgesetze}$$

$$1{,}2 = \left(\frac{1{,}5}{1{,}3}\right)^x$$

$$1{,}2 = \frac{15}{13}^x \quad | \log$$

$$\log_{\frac{15}{13}}(1{,}2) = x$$

$$1{,}2740... = x$$
$$1{,}27 \approx x$$

$$1{,}27\ h = 1h + 0{,}27 \cdot 60\ min$$
$$= 1h + 16{,}2\ min$$

Das Überholen findet um ≈12:16 statt.

6) a) $f(0) = 1$

$\Rightarrow f(x) = 1 \cdot a^x$

$f(x) = a^x$

$f(1) = 1{,}8$

$\Rightarrow f(1) = a^1 = 1{,}8$

$a = 1{,}8$

$\Rightarrow f(x) = 1{,}8^x$

Test: $f(2) = 1{,}8^2 = 3{,}24$ ✓

b) $f(0) = 2$

$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot a^x$

$f(1) = 2{,}4$

$\Rightarrow f(1) = 2 \cdot a^1 = 2{,}4$

$2 \cdot a = 2{,}4$

$a = 1{,}2$

$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot 1{,}2^x$

Test: $f(2) = 2 \cdot 1{,}2^2 = 2{,}88$ ✓

c) $f(0) = 5$

$\Rightarrow f(x) = 5 \cdot a^x$

$f(3) = 3$

$\Rightarrow f(3) = 5 \cdot a^3 = 3$

$5a^3 = 3 \quad | :5$

$a^3 = \frac{3}{5} \quad | \sqrt[3]{}$

$a = 0.843$

$\Rightarrow f(x) = 5 \cdot 0{,}843^x$

7) a)

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	12	36	108	324	972	2916

$\cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3 \quad \cdot 3$

$f(x) = 12 \cdot 3^x$

b) weder linear, noch exponentiell

$f(x) = (x-2)^2$

c)

x	-1	0	1	2	3
f(x)	11	14	17	20	23

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

$f(x) = 14 + 3x$

d)

x	0	2	4	6
f(x)	16	23,04	33,1776	47,775744

$\cdot 1{,}44 \quad \cdot 1{,}44 \quad \cdot 1{,}44$

$f(0) = 16 \Rightarrow f(x) = 16 \cdot a^x$

$f(2) = 23{,}04 \Rightarrow 16 \cdot a^2 = 23{,}04$

$a^2 = 1{,}44$

$a = 1{,}2$

$\Rightarrow f(x) = 16 \cdot 1{,}2^x$

8) a) $\log_3(531.441) = x$

$12 = x$

b) $2 \cdot 3^x = 18 \quad |:2$

$3^x = 9$

$x = 2$

c) $1{,}5 \cdot 2^x = 12 \quad |:1{,}5$

$2^x = 8$

$x = 3$

d) $x \cdot 2^3 = 48$

$x \cdot 8 = 48 \quad |:8$

$x = 6$

e) $2 \cdot 4^3 = x$

$128 = x$

f) $x = 2{,}31$

g) $x = 1{,}77$

h) $x = -0{,}065$

i) $x = 1$

j) $x = 0$

k) $x = 4$

l) $\lightning$

m) $x = 1{,}54$

n) $x = 4^6 = 4096$

o) $x = 2^8 = 256$

p) $x^3 = 9 \quad |\sqrt[3]{\ }$

$x = \sqrt[3]{9}$

$x = 2{,}08$

q) $\log_2(3) + \log_2(5)$

$= \log_2(3 \cdot 5)$

$= \log_2(15)$

r) $x \cdot \log_2(3)$

$= \log_2(3^x)$

$\Rightarrow x = 2$

s) $2 \cdot \log_3(5)$

$= \log_3(5^2)$

$\Rightarrow x = 25$