Lösungen (Teil 2)

5a) $f(x)=0$

$0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}8x = 0$

(GTR ...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 4{,}6277$

$x_3 = 10{,}3723$

Es sind die Punkte $P_1(0/0)$, $P_2(4{,}63/0)$ und $P_3(10{,}37/0)$.

b) $f(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}8x$

$f'(x) = 0{,}3x^2 - 3x + 4{,}8$

$f''(x) = 0{,}6x - 3$

Notwend. Bed.: $f'(x) = 0$

$0{,}3x^2 - 3x + 4{,}8 = 0$

GTR ...

$x_1 = 2$

$x_2 = 8$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2) = 0{,}6 \cdot 2 - 3 = -1{,}8 \Rightarrow$ Hochpunkt

$f''(8) = 0{,}6 \cdot 8 - 3 = 1{,}8 \Rightarrow$ Tiefpunkt

Ränder:

$f(-1) = -6{,}4$

$f(2) = 4{,}4$

$f(8) = -6{,}4$

$f(11) = 4{,}4$

die südlichsten Punkte:

$S_1(-1/-6{,}4)$

$S_2(8/-6{,}4)$

die nördlichsten Punkte:

$N_1(2/4{,}4)$

$N_2(11/4{,}4)$

c) nach rechts gekrümmt $\hat{=}$ $f''(x)<0$

nach links " $\hat{=}$ $f''(x)>0$

Wir suchen die Nullstellen von f''

$f''(x)=0{,}6x-3$

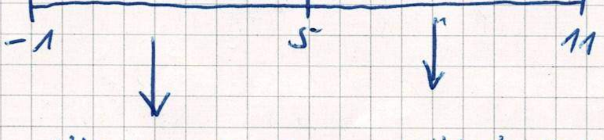
$0{,}6x-3=0$

$0{,}6x=3 \quad |:0{,}6$

$x=5$

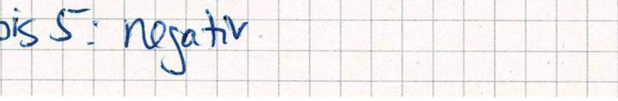
Die Nullstelle $x=5$ teilt das Intervall von -1 bis 11 in 2 Teile: bis 5 und ab 5.

Wo ist welches Vorzeichen von f''?



$f''(0)=-3<0$ $\qquad$ $f''(6)=0{,}6\cdot6-3=0{,}6>0$

Es genügt, aus jedem Bereich einen Wert zu testen.

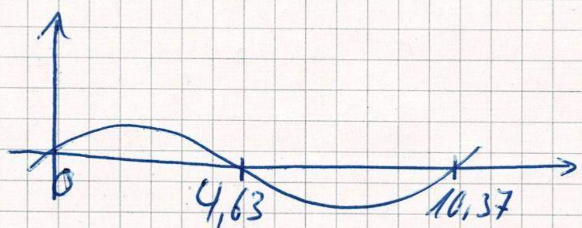


-1 bis 5: negativ

$\Rightarrow$ Von $x=-1$ bis $x=5$

$-1 \leq x < 5$

d)



$$\int_0^{4,63} f(x)\,dx = \int_0^{4,63} 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}8x \; dx$$

$$= \left[\frac{0{,}1}{4}x^4 - \frac{1{,}5}{3}x^3 + \frac{4{,}8}{2}x^2\right]_0^{4,63}$$

$$= \left[0{,}025x^4 - 0{,}5x^3 + 2{,}4x^2\right]_0^{4,63}$$

$$= 13{,}31$$

$$\int_{4,63}^{10,37} f(x)\,dx = \int_{4,63}^{10,37} 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}8x \; dx$$

$$= \left[0{,}025x^4 - 0{,}5x^3 + 2{,}4x^2\right]_{4,63}^{10,37}$$

$$= -23{,}70$$

$$A = A_{links} + A_{rechts} = 13{,}31 + 23{,}7 = \underline{37{,}01\ km^2}$$

e) ① $f(1) = 3{,}4$

$f'(1) = 2{,}1$

$\Rightarrow t(x) = 2{,}1x + b$

$A(1|3{,}4)$ auf t $\Rightarrow$ $t(1) = 3{,}4$

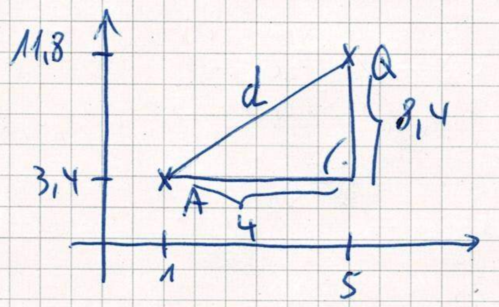
$2{,}1 \cdot 1 + b = 3{,}4$

$2{,}1 + b = 3{,}4$

$\underline{b = 1{,}3}$

$\Rightarrow t(x) = 2{,}1x + 1{,}3$

② $y = t(5) = 2{,}1 \cdot 5 + 1{,}3 = 11{,}8$



$d^2 = 4^2 + 8{,}4^2$ (Satz v. Pythagoras)

$d^2 = 86{,}56$

$\underline{d = 9{,}3\ km}$

Die Länge beträgt 9,3 km.

6a) y-Achse: $f(0) = 2$

x-Achse: $f(x) = 0$

$0{,}2x^3 - 3{,}6x^2 + 16{,}2x + 2 = 0$

GTR..

$x = -0{,}12$

Die Straße überquert die Kanäle in den Punkten $P_1(0/2)$ und $P_2(-0{,}12/0)$

b) Wenn C auf f liegt, dann gilt

$f(4) = 20$

Es gilt: $f(4) = 22$

$\Rightarrow$ C liegt nicht auf der Route.

c) $f'(x) = 0{,}6x^2 - 7{,}2x + 16{,}2$

$f''(x) = 1{,}2x - 7{,}2$

N.B.: $f'(x) = 0$

$0{,}6x^2 - 7{,}2x + 16{,}2 = 0$

(GTR...)

$x_1 = 3$

$x_2 = 9$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(3) = 1{,}2 \cdot 3 - 7{,}2 = -3{,}6 < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt

$f''(9) = 1{,}2 \cdot 9 - 7{,}2 = 3{,}6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt

Ränder: $f(-1) = -18$

$f(3) = 23{,}6$

$f(9) = 2$

$f(11) = 10{,}8$

südlichster Punkt: $S(-1/-18)$

nördlichster Punkt: $N(3/23{,}6)$

d) nach rechts lenken (wenn man von A nach B fährt) = nach rechts gekrümmt $\Rightarrow f''(x) < 0$

nach links lenken (wenn man von A nach B fährt) = nach links gekrümmt $\Rightarrow f''(x) > 0$

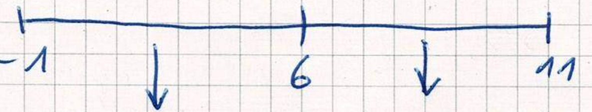
Wir suchen die Nullstellen von f''

$f''(x) = 1{,}2x - 7{,}2$

$1{,}2x - 7{,}2 = 0$

$1{,}2x = 7{,}2$

$x = 6$



$f''(0) = -7{,}2 < 0$ rechts

$f''(7) = 1{,}2 \cdot 7 - 7{,}2 = 1{,}2 > 0$ links

Vorsicht: H. Tiex fährt von B nach A (nicht von A nach B)

$\Rightarrow$ Bei ihm ist die Krümmung genau anders herum

Ergebnis: rechts 11 bis 6
links ab 6 (bis -1)

e) $f(2) = 21,6$

$f(x) = 21,6$

$0,2x^3 - 3,6x^2 + 16,2x + 2 = 21,6$

(GTR...)

$x_1 = 2$

$x_2 = 4,13$

$x_3 = 11,87$ (außerhalb des Def. bereichs)

zurückzulegender Weg: $4,13 - 2 = 2,13$

$\Rightarrow$ 2,13 km

f) Schnittpunkte: $f(1,5) = 18,875$

① g und f:

$f(x) = g(x)$

$0,2x^3 - 3,6x^2 + 16,2x + 2 = -2x + 21,875$

(GTR...)

$x_1 = 1,5$ (Ausgangsposition)

$x_2 = 6,9$

$x_3 = 9,6$

y-Werte:

$g(6,9) = 8,07$

$g(9,6) = 2,68$

$\Rightarrow S_1 (6,9 / 8,07)$

$S_2 (9,6 / 2,68)$

(11) Schnittpunkt mit der x-Achse

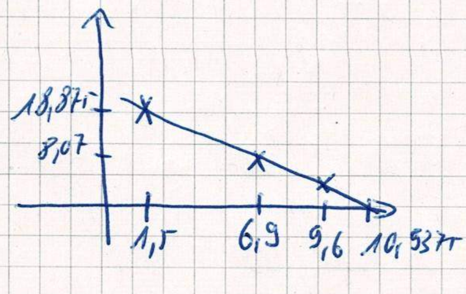
$g(x) = 0$

$-2x + 21,875 = 0$

$-2x = -21,875$

$x = 10,9375$

$\Rightarrow N(10,9375/0)$



Ergebnis: Er erreicht die Straße im Punkt $P(6,9/8,07)$

7a) Nullstellen:

$f(x) = 0$

$(x+1) \cdot e^{-x} = 0$

$x+1 = 0$ oder $e^{-x} = 0$ ↯

$x = -1$

$\Rightarrow N(-1/0)$

Extremstellen:

$f'(x) = -x \cdot e^{-x}$

$f''(x) = -1e^{-x} + -x \cdot (-1) \cdot e^{-x}$

$= -1e^{-x} + xe^{-x}$

$= (x-1) \cdot e^{-x}$

Not. B.: $f'(x)=0$

$-x \cdot e^{-x}=0$

$-x=0$ oder $e^{-x}=0$

$x=0$ $\quad$ ↯

Hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f''(0)=(0-1)\cdot e^{-0}$

$=-1\cdot e^{0}$

$=-1$

$\Rightarrow$ Hochpunkt

y-Wert: $f(0)=(0+1)\cdot e^{-0}$

$=1\cdot e^{0}$

$=1$

$\Rightarrow$ Hochpunkt $H(0|1)$

b) $f''(x)=(x-1)\cdot e^{-x}$

$f'''(x)=1\cdot e^{-x}+(x-1)\cdot(-1)\cdot e^{-x}$

$=1\cdot e^{-x}+(-x+1)\cdot e^{-x}$

$=(-x+2)\cdot e^{-x}$

Notw. Bed.: $f''(x)=0$

$(x-1)\cdot e^{-x}=0$

$x-1=0$ oder $e^{-x}=0$

$x=1$ $\quad$ ↯

Hinr. Bed.: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$f'''(1)=(-1+2)\cdot e^{-1}$

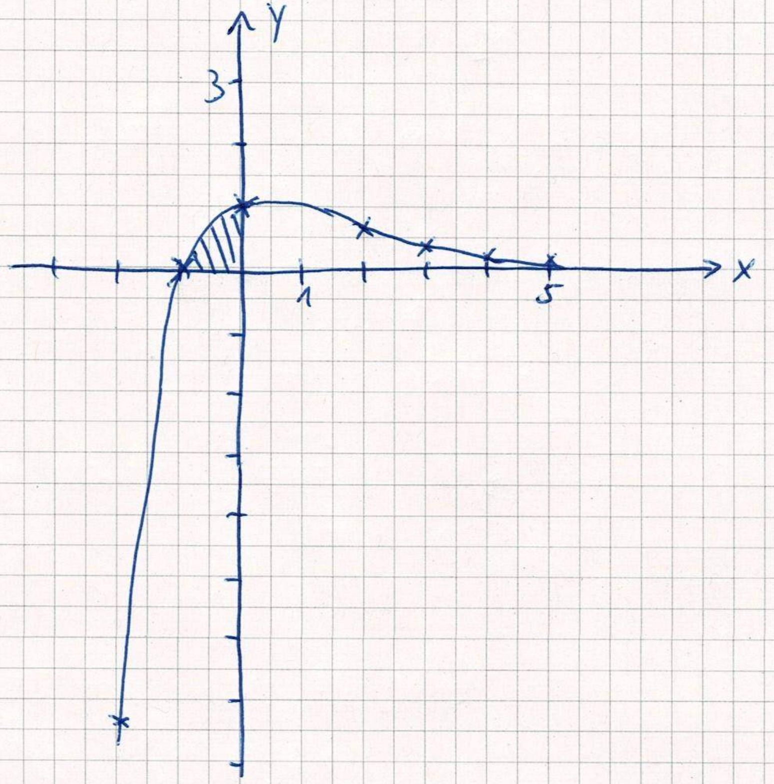
$=1\cdot e^{-1}>0$

$\Rightarrow$ WP

$\Rightarrow$ genau ein WP

c)

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	$-7{,}4$	0	1	$0{,}73$	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}09$



d) $F'(x) = (-1)\cdot e^{-x} + (-x-2)\cdot(-1)\cdot e^{-x}$

$= -1\cdot e^{-x} + (x+2)\cdot e^{-x}$

$= (x+1)\cdot e^{-x}$

$= f(x)$

$\Rightarrow$ F Stammf. von f

F hat eine Nullstelle bei $x = -2$:

$(-x-2)\cdot e^{-x} = 0$

$-x-2 = 0$ oder $e^{-x} = 0$ $\lightning$

$\underline{-2 = x}$

$\Rightarrow$ Graph 1 kann es nicht sein

Der Graph von f ist negativ für $x < -1$ $\Rightarrow$ F (dessen Ableitung f ist) muss dort fallen

$\Rightarrow$ Graph 3 kann es nicht sein

$\Rightarrow$ Es ist Graph 2

e)

$$A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x+1)\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \left[(-x-2)\cdot e^{-x}\right]_{-1}^{0}$$

$$= (-0-2)\cdot e^{0} - \left((-(-1)-2)\cdot e^{-(-1)}\right)$$

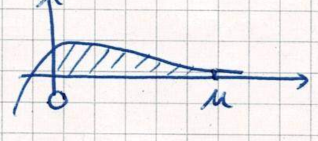
$$= -2\cdot 1 \quad - \left((1-2)\cdot e\right)$$

$$= -2 \quad - \left((-1)\cdot e\right)$$

$$= -2 \quad + e$$

$$\approx 0{,}72$$

f)



Wir setzen einen Platzhalter u

$$A = \int_{0}^{u} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{u} (x+1)\cdot e^{-x}\,dx$$

$= \left[(-x-2) \cdot e^{-x} \right]_0^u$

$= F(u) - F(0)$

Graph 2 von Aufgabe d kann man entnehmen, dass $F(0) = -2$ ist. Also:

$= F(u) - (-2)$
$= F(u) + 2$

Dem Graphen kann man auch entnehmen, dass $F(u)$ für $u > 0$ immer negativ ist.

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{negative} \\ \text{Zahl}}}{F(u)} + 2$

$\Rightarrow$ Die Fläche kann nicht größer als 2 FE werden.