LÖSUNGEN (Teil 2)

1a) 10 %

b) (I)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5800 \\ 3200 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5580 \\ 2800 \\ 3620 \end{pmatrix}$$

Es sind 5580 in A, 2800 in B und 3620 in C.

(II)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5800 \\ 3200 \\ 3000 \end{pmatrix}$$

$$0{,}8x + 0{,}2y + 0{,}1z = 5800$$
$$0{,}1x + 0{,}6y + 0{,}1z = 3200$$
$$0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}8z = 3000$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 & 5800 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 & 3200 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 & 3000 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$x = 6000$

$y = 4000$

$z = 2000$

Es waren 6000 in A, 4000 in B und 2000 in C.

c)

$$N = M \cdot M$$

$$N = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0{,}67 & 0{,}3 & 0{,}18 \\ 0{,}15 & 0{,}4 & 0{,}15 \\ 0{,}18 & 0{,}3 & 0{,}67 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$0{,}8x + 0{,}2y + 0{,}1z = x$$
$$0{,}1x + 0{,}6y + 0{,}1z = y$$
$$0{,}1x + 0{,}2y + 0{,}8z = z$$

$$-0{,}2x + 0{,}2y + 0{,}1z = 0$$
$$0{,}1x - 0{,}4y + 0{,}1z = 0$$
$$0{,}1x + 0{,}2y - 0{,}2z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & -0{,}4 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & -0{,}2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I} + 2\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{I} + 2\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & -0{,}3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}6 & 0{,}3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow z = r, \ r \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow -0{,}6y + 0{,}3r = 0$$
$$-0{,}6y = -0{,}3r$$
$$y = \frac{1}{2}r$$

$$\Rightarrow -0{,}2x + 0{,}2 \cdot 0{,}5r + 0{,}1r = 0$$
$$-0{,}2x + 0{,}1r + 0{,}1r = 0$$
$$-0{,}2x \quad + 0{,}2r \quad = 0$$
$$-0{,}2x \quad = -0{,}2r$$
$$x = r$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0{,}5r \\ r \end{pmatrix}$$

Die gesamte Population beträgt 12.000.
Also gilt:

$$x + y + z = 12.000$$
$$r + \frac{1}{2}r + r = 12.000$$
$$2{,}5r = 12.000 \quad |:2{,}5$$
$$r = 4800$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4800 \\ 2400 \\ 4800 \end{pmatrix}$$

Eine stationäre Verteilung wäre erreicht bei 4800 Käufern in A, 2400 in B und 4800 in C.

e) Die stationäre Verteilung sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0{,}5r \\ r \end{pmatrix}$$

Wir setzen die gesamte Population gleich 100 %.
Dann gilt: $A + B + C = 100$
$$r + 0{,}5r + r = 100$$
$$2{,}5r = 100$$
$$r = 40$$

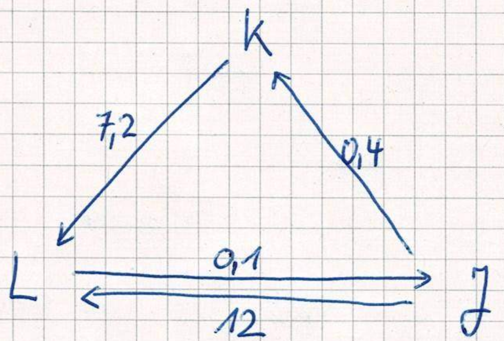
Also: $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Auf lange Sicht werden 40 % der Käufer in A kaufen, 20 % in B und 40 % in C. Diese Anteile werden sich nicht mehr verändern.

2a)

$$\begin{array}{c} \\ L \\ J \\ K \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} L & J & K \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 7{,}2 & 4 \\ 0{,}12 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)



Überlebensrate Altkäfer: 0

" Jungkäfer: 40 %

c)

$\vec{V_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 7{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{V_1} \quad \text{(nach 1 Jahr)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 7{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{V_2} \quad \text{(nach 2 Jahren)}$$

d) l: Zahl der Larven
j: " " Jungkäfer
k: " " Altkäfer

3x so viel Jungkäfer wie Altkäfer: $j = 3 \cdot k$
12x so viel Larven wie Jungkäfer: $l = 12 \cdot j$

$\Rightarrow$ I. $j = 3k$
II. $l = 12j$

Wir setzen I in II ein:
$l = 12 \cdot (3k) = 36k$

$\Rightarrow$ $l = 36k$
$j = 3k$
$k = k$

Gesamtpopulation: 200
$\Rightarrow l + j + k = 200$
$36k + 3k + k = 200$
$40k = 200$
$k = 5$

$\Rightarrow l = 180$
$j = 15$
$k = 5$

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 180 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ich zeige, dass die Verteilung stabil ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 7{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \cdot 15 + 7{,}2 \cdot 5 \\ 0{,}1 \cdot 180 \\ 0{,}4 \cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$$

alte Verteilung:	180	90 %	von allen
	15	7,5 %	" "
	5	2,5 %	" "
neue Verteilung:	216	90 %	" "
	18	7,5 %	" "
	6	2,5 %	" "
insgesamt:	240		

Das Verhältnis der 3 Gruppen L, J, K zueinander bleibt stabil (90 % L, 7,5 % J und 2,5 % K). Die absolute Zahl bleibt nicht stabil: Alle Gruppen wachsen.

e) p: Anzahl der Larven, die durchschnittlich auf einen Altkäfer kommt

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 8y + pz &= x \\ 0{,}1x &= y \\ 0{,}4y &= z \end{aligned}$$

$$-x + 8y + pz = 0$$
$$0{,}1x - y + 0z = 0$$
$$0x + 0{,}4y - z = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & p & 0 \\ 0{,}1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -1 & 0 \end{array}\right) 10 \cdot \mathrm{II} + \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & p & 0 \\ 0 & -2 & p & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -1 & 0 \end{array}\right) 5 \cdot \mathrm{III} + \mathrm{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & p & 0 \\ 0 & -2 & p & 0 \\ 0 & 0 & -5+p & 0 \end{array}\right)$$

Damit eine stat. Vert. entsteht, muss gelten: $-5+p=0$

$$\underline{p=5}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad z = r, \ r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -2y + 5r = 0$
$$-2y = -5r$$
$$y = 2{,}5r$$

$\Rightarrow -x + 20r + 5r = 0$
$$-x = -25r$$
$$x = 25r$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25r \\ 2{,}5r \\ r \end{pmatrix}$$

Wir setzen die gesamte Population gleich 100%.

$x + y + z = 100\%$
$$25r + 2{,}5r + r = 100$$
$$28{,}5r = 100$$
$$r \approx 3{,}51$$

$\Rightarrow$ $x: 25 \cdot 3{,}51 = 87{,}75\,\%$ von allen

$y: 2{,}5 \cdot 3{,}51 = 8{,}775\,\%$ " "

$z: 3{,}51\,\%$ " "

Eine stationäre (tatsächlich unveränderliche) Verteilung liegt vor, wenn 87,75 % bei L, 8,775 % bei J und 3,51 % bei K sind.

3a) 0. Tag: 400 bei A
400 " B
400 " C

1. Tag: 70 % bleiben bei C : $0{,}7 \cdot 400 = 280$
10 % kommen von B : $0{,}1 \cdot 400 = 40$
4 % " " A : $0{,}04 \cdot 400 = 16$

$$\overline{336}$$

Es sind 336 Tiere.

$$U = \begin{array}{c} \\ C \\ A \\ B \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C & A & B \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}04 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}06 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

erste Zeile: 0,7 0,04 0,1

$\downarrow$ 70 % bleiben bei C

$\downarrow$ 4 % wechseln von A nach C

$\downarrow$ 10 % wechseln von B nach C

b) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 440 \\ 424 \\ 336 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}$

Nach einem Tag sind 440 Bienen in A, 424 in B und 336 in C.

Da die Matrix das Wanderverhalten auch beschreibt, sind die Zeilen & Spalten nur vertauscht worden.

c) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$0{,}9a + 0{,}1b + 0{,}1c = a$
$0{,}06a + 0{,}8b + 0{,}2c = b$
$0{,}04a + 0{,}1b + 0{,}7c = c$

$-0{,}1a + 0{,}1b + 0{,}1c = 0$
$0{,}06a - 0{,}2b + 0{,}2c = 0$
$0{,}04a + 0{,}1b - 0{,}3c = 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}06 & -0{,}2 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}04 & 0{,}1 & -0{,}3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 0{,}6 \cdot I + II \\ 0{,}4 \cdot I + III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}14 & 0{,}26 & 0 \\ 0 & 0{,}14 & -0{,}26 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II + III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}14 & 0{,}26 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow c = r, r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow -0{,}14\,l + 0{,}26\,r = 0$$
$$-0{,}14\,l = -0{,}26\,r$$
$$l = \frac{26}{14}r = \frac{13}{7}r$$
$$\Rightarrow -0{,}1\,x + \frac{13}{70}r + \frac{1}{10}r = 0$$
$$-\frac{1}{10}x + \frac{2}{7}r = 0$$
$$-\frac{1}{10}r = -\frac{2}{7}r$$
$$r = \frac{20}{7}r$$
$$\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20/7\,r\\13/7\,r\\r\end{pmatrix}$$

Gesamtpopulation: 1200

$$A+B+C = 1200$$
$$\frac{20}{7}r + \frac{13}{7}r + r = 1200$$
$$\frac{40}{7}r = 1200$$
$$r = 210$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}600\\390\\210\end{pmatrix}$$

Bei den Untersuchungen waren 600 bei A, 390 an B und 210 bei C
→ Das entspricht der stat. Vert.

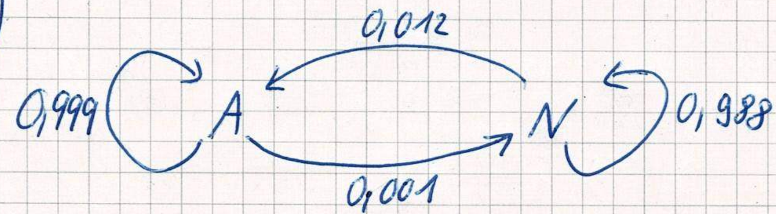
d)
$$\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\13/40 & 13/40 & 13/40\\7/40 & 7/40 & 7/40\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\,x + 1/2\,y + 1/2\,z\\13/40\,x + 13/40\,y + \frac{13}{40}z\\7/40\,x + 7/40\,y + 7/40\,z\end{pmatrix} = (x+y+z)\cdot\begin{pmatrix}1/2\\13/40\\7/40\end{pmatrix}$$

$$= 1200\cdot\begin{pmatrix}1/2\\13/40\\7/40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}600\\390\\210\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}1\\0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2\\0{,}04 & 0{,}1 & 0{,}7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\13/40 & 13/40 & 13/40\\7/40 & 7/40 & 7/40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 1/2\\13/40 & 13/40 & 13/40\\7/40 & 7/40 & 7/40\end{pmatrix}$$

G ist die Grenzmatrix von M.
Sie bildet jede beliebige Verteilung direkt auf die Verteilung ab, die diese nach vielen Übergängen irgendwann mal erreichen wird.

4a)



$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & N \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Man setzt voraus, dass das Wechselverhalten ständig dasselbe bleibt. Außerdem müsste die Gesamtpopulation immer konstant bleiben.

c) 2004: $\begin{pmatrix} A \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix}$

2005: $\begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 69{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}5925 \\ 13{,}4075 \end{pmatrix}$

2006: $\begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 69{,}5925 \\ 13{,}4075 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \approx 69{,}6838 \\ \approx 13{,}3162 \end{pmatrix}$

2005 A 69,59 Mio
N 13,41 "

2006 A 69,68 "
N 13,32 "

d) $\begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}998 & 0{,}0238 \\ 0{,}00198 & 0{,}9762 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0{,}998 & 0{,}0238 \\ 0{,}00198 & 0{,}9762 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}997 & 0{,}0355 \\ 0{,}00296 & 0{,}9645 \end{pmatrix}$$

Wir testen die Ergebnisse von (c):

$$\begin{pmatrix} 0{,}998 & 0{,}0238 \\ 0{,}00198 & 0{,}9762 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 69{,}5 \\ 13{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69{,}6823 \\ 13{,}3163 \end{pmatrix}$$

Die Abweichungen entstehen durch Rundung.

$$\begin{pmatrix} 0{,}998 & 0{,}0238 \\ 0{,}00198 & 0{,}9762 \end{pmatrix}$$

↓

Von einem Jahr zum übernächsten:

- bleiben 99,8 % der Menschen in den alten Ländern
  0,198 % wechseln in die neuen
- bleiben 97,62 % der Menschen in den neuen Ländern
  2,38 % wechseln in die alten

e) $\begin{pmatrix} 0{,}999 & 0{,}012 \\ 0{,}001 & 0{,}988 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$0{,}999x + 0{,}012y = x$$
$$0{,}001x + 0{,}988y = y$$

$-0{,}001x + 0{,}012y = 0$
$0{,}001x - 0{,}012y = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}001 & 0{,}012 & 0 \\ 0{,}001 & -0{,}012 & 0 \end{array}\right) I + II$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0{,}001 & 0{,}012 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow y = r,\ r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -0{,}001x + 0{,}012r = 0$
$-0{,}001x = -0{,}012r$
$x = 12r$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12r \\ r \end{pmatrix}$$

Gesamtpopulation: 69,5 Mio + 13,5 Mio = 83 Mio

$x + y = 83$
$12r + r = 83$
$13r = 83$
$r \approx 6{,}3846$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76{,}6154 \\ 6{,}3846 \end{pmatrix}$$

Auf lange Sicht werden die neuen Länder eine Bevölkerung von ≈6,38 Mio erreichen. Der dt. Osten wird also noch <u>mehr</u> als 50% verlieren:

$$\frac{6{,}3846}{13{,}5} = 0{,}4729 \mathrel{\hat{=}} 47{,}29\,\%$$

f) $\begin{pmatrix} 0{,}999 & a \\ 0{,}001 & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 73 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ 10 \end{pmatrix}$

$72{,}927 + 10a = 73$
$0{,}073 + 10 \cdot (1-a) = 10$

$10a = 0{,}073$
$0{,}073 + 10 - 10a = 10 \quad | -10$

$a = 0{,}0073$
$0{,}073 - 10a = 0$

$a = 0{,}0073$
$-10a = -0{,}073 \quad | : (-10)$

$a = 0{,}0073$
$a = 0{,}0073$

Wenn der Bestand bei 10 Mio bleiben soll, so muss $\begin{pmatrix} 83-10 \\ 10 \end{pmatrix}$ eine stationäre Vert. sein.

Ergebnis: Die Quote darf nur 0,73 % betragen.