LÖSUNGEN (Teil 1)

1a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \\ 1 & 3 & 4 & 11 \end{array}\right)\begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -3 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -z = -1$$
$$z = 1$$
$$\Rightarrow -y - 2 = -4$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$
$$\Rightarrow x + 2 + 1 = 4$$
$$x = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 6z = 6$$
$$z = 1$$
$$\Rightarrow -y + 4 = 3$$
$$-y = -1$$
$$y = 1$$
$$\Rightarrow x + 1 + 1 = 3$$
$$x = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I-II \\ 2\cdot I-III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -3 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II-III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow 0 = -1$ ↯

$\Rightarrow$ keine Lösung vorhanden

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I-II \\ 2\cdot I-III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II-III \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow z = r, \quad r \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -y - 2r = -3$

$-y = -3 + 2r$

$y = 3 - 2r$

$\Rightarrow x + 3 - 2r + r = 3$

$x - r = 0$

$x = r$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 3-2r \\ r \end{pmatrix}$

e)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I-II \\ 2\cdot I-III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ II-III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -2z = -2$

$z = 1$

$\Rightarrow -y - 4 = -4$

$-y = 0$

$y = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 2$

$x = 1$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

I. $1 + 2 + 2 = a$

II. $2\cdot 1 - 2 + 2\cdot 2 = 4$

III. $2\cdot 1 + 2 + 3\cdot 2 = 2a$

I. $5 = a$

II. $4 = 4$

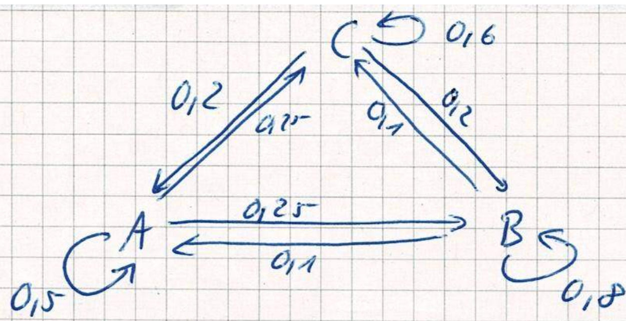
III. $10 = 2a$

$\Rightarrow \underline{a = 5}$

3)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

4a)



b) 25 %

c)
$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500+100+200 \\ 250+800+200 \\ 250+100+600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1250 \\ 950 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A : 800 Käufer
B : 1250 "
C : 950 "

d)
$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}5a + 0{,}1b + 0{,}2c \\ 0{,}25a + 0{,}8b + 0{,}2c \\ 0{,}25a + 0{,}1b + 0{,}6c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 & 1000 \\ 0{,}25 & 0{,}8 & 0{,}2 & 1000 \\ 0{,}25 & 0{,}1 & 0{,}6 & 1000 \end{array}\right)$$

5)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6+2 & 1+6+4 & 2+4+3 \\ 3+3+4 & 3+3+8 & 6+2+6 \\ 2+6+8 & 2+6+16 & 4+4+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 11 & 9 \\ 10 & 14 & 14 \\ 16 & 24 & 20 \end{pmatrix}$$

6 a) $x^2 + 2x - 8 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1 + 8}$

$x = -1 \pm \sqrt{9}$

$x = -1 \pm 3$

$x_1 = -4$

$x_2 = 2$

b) $\frac{1}{2}x^2 + x - 1{,}5 = 0 \quad | \cdot 2$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

$x = -1 \pm \sqrt{4}$

$x = -1 \pm 2$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

c) $x^3 - 9x = 0$

$x \cdot (x^2 - 9) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x_2 = 3$

$x_3 = -3$

d) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 2z + 1 = 0$

$z = 1 \pm \sqrt{1 - 1}$

$z = 1 \qquad | z = x^2$

$x^2 = 1 \qquad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$

e) $x^6 - 4x^3 + 4 = 0 \quad | \; x^3 = z$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$z = 2 \quad | \; z = x^3$

$x^3 = 2$

$x = \sqrt[3]{2}$

f) $x^5 + 2x^3 - 3x = 0$

$x \cdot (x^4 + 2x^2 - 3) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \quad | \; x^2 = z$

$z^2 + 2z - 3 = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1+3}$

$z = -1 \pm \sqrt{4}$

$z = -1 \pm 2$

$z_1 = -3 \qquad z_2 = 1 \quad | \; z = x^2$

$x^2 = -3 \qquad x_2 = 1$

$\not{\varepsilon} \qquad x_3 = -1$

g) $(2x^2 - 50) \cdot (x+3) = 0$

$2x^2 - 50 = 0$ oder $x + 3 = 0$

$2x^2 = 50 \qquad x_3 = -3$

$x^2 = 25$

$x_1 = 5$

$x_2 = -5$

h) $(x+7) \cdot e^{2x} = 0$

$x + 7 = 0$ oder $e^{2x} = 0$

$\underline{x = -7} \qquad \not{\varepsilon}$

i) $(x^2-2x+1)\cdot e^{4x}=0$

$x^2-2x+1=0$ oder $e^{4x}=0$

$x=1\pm\sqrt{1-1}$ $\qquad$ $\mathcal{E}$

$x=1$

j) $(x^3-2x)\cdot e^{2x}=0$

$x^3-2x=0$ oder $e^{2x}=0$

$x(x^2-2)=0$ $\qquad$ $\mathcal{E}$

$x_1=0$ $\qquad$ $x^2=2$

$x_2=\sqrt{2}$

$x_3=-\sqrt{2}$

k) $2e^x-6=0$

$2e^x=6 \quad |:2$

$e^x=3$

$x=\ln(3)$

7a) $f'(x)=5\cdot e^{5x}$

$f''(x)=25\cdot e^{5x}$

b) $f'(x)=21x^6+12x-2$

$f''(x)=126x^5+12$

c) $f'(x)=1\cdot e^{2x}+(x+2)\cdot 2\cdot e^{2x}$

$=1e^{2x}+(2x+4)\cdot e^{2x}$

$=(2x+5)\cdot e^{2x}$

$f''(x)=2\cdot e^{2x}+(2x+5)\cdot 2\cdot e^{2x}$

$=2e^{2x}+(4x+10)\cdot e^{2x}$

$=(4x+12)\cdot e^{2x}$

d) $f'(x) = 2x \cdot e^{6x} + (x^2+5) \cdot 6 \cdot e^{6x}$
$= 2x\, e^{6x} + (6x^2+30) \cdot e^{6x}$
$= (6x^2 + 2x + 30) \cdot e^{6x}$

$f''(x) = (12x+2) \cdot e^{6x} + (6x^2+2x+30) \cdot 6 \cdot e^{6x}$
$= (12x+2) \cdot e^{6x} + (36x^2 + 12x + 180) \cdot e^{6x}$
$= (36x^2 + 24x + 182) \cdot e^{6x}$

8) $f'(x) = 6\, e^{2x}$
$f''(x) = 12\, e^{2x}$
$f'''(x) = 24\, e^{2x}$

9a) $e^{-x} - 1 = 0$
$e^{-x} = 1 \quad | \ln$
$-x = \ln(1)$
$-x = 0$
$x = 0$

Beachte: ($\ln(1) = 0$)

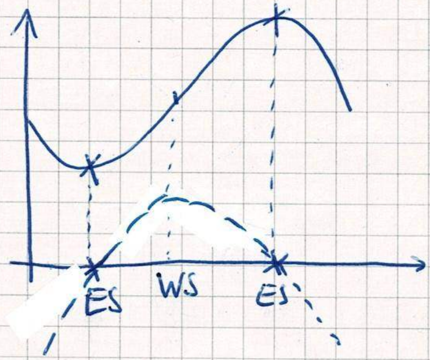
b) $f(-1) = e^{-(-1)} - 1 = e^{1} - 1 = e - 1$
$f'(x) = -e^{-x}$
$f'(-1) = -e^{1} = -e$

$\Rightarrow t(x) = -e \cdot x + b$

$A(-1/e-1)$ auf $t \Rightarrow t(-1) = e - 1$
$-e \cdot (-1) + b = e - 1$
$e + b = e - 1 \quad |-e$
$b = -1$

$\Rightarrow t(x) = -ex - 1$

10 a)



b) Es gibt 2 Extremstellen.

11 a) Es handelt sich um $g(x)$

Man sieht in der Abbildung, dass $A(2|2)$ auf dem Graphen liegt.
Es gilt aber $f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ ↯

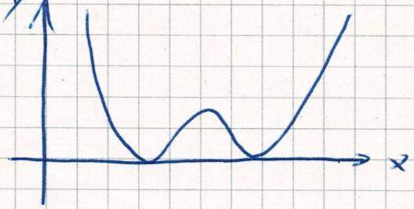
Man sieht in der Abbildung, dass $B(3|5)$ auf dem Graphen liegt.
Es gilt aber
$$h(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 2 = 27 - 2 \cdot 9 + 2 = 27 - 18 + 2 = 11$$ ↯

b)
$$g(x) = (x-1)^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = x^2 - 2x + 2$$
$$g'(x) = 2x - 2$$
$$g'(0) = -2$$
$$\Rightarrow t(x) = -2x + b$$

$g(0) = 2$

$C(0|2)$ auf $t \Rightarrow t(0) = 2$
$-2 \cdot 0 + b = 2$
$b = 2$
$\Rightarrow t(x) = -2x + 2$

12)



13 a) falsch

Wenn f einen Extrempunkt bei x = 0 hätte, so müsste f'(0) = 0 gelten

b) wahr

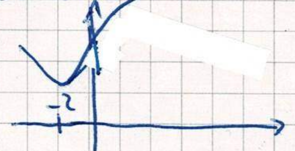
Die Steigung der Tangente entspricht der Ableitung an der Stelle und es gilt f'(-2) = 0

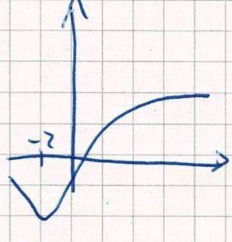
c) falsch

Wendepunkte von f sind Extrempunkte von f' und f' hat einen solchen bei x = 0

d) unentscheidbar

f'(x) ist größer als 0 für x > 0, f wächst also ununterbrochen. Aber wir wissen nicht, von wo aus f wächst.





14) Bei $x = -1$ liegt ein Hochpunkt vor.

Es gilt nämlich $f'(-1) = 0$.
Außerdem ist f' positiv links davon $\Rightarrow$
Dort wächst f.
Und f' ist negativ rechts davon $\Rightarrow$
Dort fällt f.