AUFGABEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) In einer Stadt gibt es 3 Supermärkte: A, B und C. In der Stadt leben insgesamt 12.000 Personen, die zwischen diesen Supermärkten hin und her wechseln. Das Wechselverhalten von einer Woche zur anderen kann mit der Matrix M beschrieben werden:

$$M = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Gib an, wie viel Prozent der Käufer in A wechseln nach einer Woche nach C?

b) Diese Woche kaufen 5800 Personen in A, 3200 in B und 3000 in C ein.
   (i) Berechne, wie die Verteilung der Käufer in der nächsten Woche aussieht.
   (ii) Berechne, wie die Verteilung der Käufer in der letzten Woche aussah.

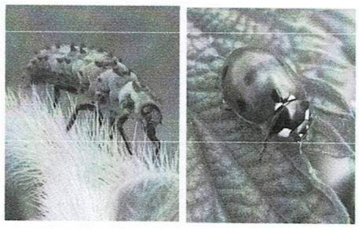
c) Bestimme eine Matrix N, mit der man bestimmen kann, wie das Wechselverhalten von einer Woche zur übernächsten aussieht.

d) Berechne eine stationäre Verteilung der 12.000 Personen in der betrachteten Stadt.

e) Bestimme, wie sich die Verteilung der Käufer auf die drei Supermärkte auf lange Sicht entwickeln wird.

2) Abitur Bremen 2011

Marienkäfer



Marienkäfer (Coccinellidae) sind eine weltweit verbreitete Insektenfamilie. In Europa findet man über 250 Arten und Unterarten, darunter den bekannten Siebenpunkt-Marienkäfer.

Eine bestimmte Marienkäferart kann bis zu drei Jahre alt werden. Wir unterscheiden Larven (*L*), die sich ein Jahr später zu Jungkäfern (*J*) und nach einem weiteren Jahr zu Altkäfern (*K*) entwickeln.

Im Frühjahr beginnen die Tiere mit der Paarung. Danach legen die Weibchen Eier, aus denen die Larven schlüpfen. Im Mittel bringt jeder Jungkäfer 7,2 Larven und jeder Altkäfer 4 Larven hervor. Von den Larven überleben nur 12% das nächste Jahr, von den Jungkäfern immerhin 50%. Alle Altkäfer sterben innerhalb des folgenden Jahres.

a) Geben Sie zu der oben beschriebenen Entwicklung eine Matrix A an, für die gilt: Multipliziert man den Populationsvektor $\vec{v}$ eines Jahres mit der Matrix A von links, erhält man den Populationsvektor für das Folgejahr.

Bei einer anderen Marienkäferart lässt sich die Population durch die Matrix B beschreiben mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 7{,}2 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ J \\ K \end{pmatrix}.$$

b) Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm für diese Population.

Geben Sie die Überlebensrate eines Altkäfers und die eines Jungkäfers pro Jahr an.

c) Ein neu angelegter Garten wird während des Sommers nur von 25 Jungkäfern bevölkert. Geben Sie zu diesem Zeitpunkt den Populationsvektor $\vec{v}_0$ an.

Berechnen Sie die Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, die die Marienkäfer-Populationen nach einem Jahr bzw. nach zwei Jahren beschreiben, wenn ihre Entwicklung mit Matrix B beschrieben wird.

d) Nach einigen Jahren hat sich für die Marienkäfer-Population, die durch die Matrix B beschrieben wird, eine stabile Verteilung ergeben. In dieser Verteilung ist die Anzahl der Jungkäfer dreimal so groß wie die der Altkäfer und die Anzahl der Larven ist zwölfmal so groß, wie die der Jungkäfer.

Geben Sie einen Vektor $\vec{v}$ an, der eine stabil verteilte Population von 200 Tieren beschreibt.

Zeigen Sie, dass diese Verteilung tatsächlich stabil bleibt.

In einer klimatisch weniger günstigen Region lässt sich die Entwicklung der Marienkäfer-Population durch eine veränderte Matrix C beschreiben, bei der ein Element unsicher ist und durch die Variable p ersetzt wurde. Es ist

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 8 & p \\ 0{,}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} L \\ J \\ K \end{pmatrix}.$$

e) Erläutern Sie, welche Bedeutung der Parameter p im Anwendungszusammenhang besitzt.

Bestimmen Sie einen Wert für p, bei dem die Population stationär bleibt.

Ermitteln Sie mit dem von Ihnen bestimmten Wert für p eine stabile Verteilung.

3) Abitur Bremen 2009

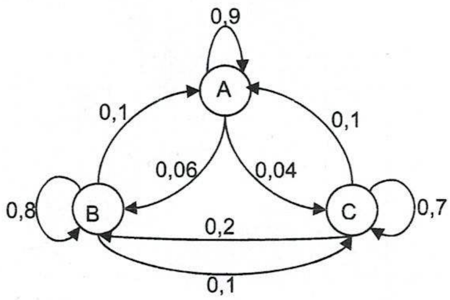
Abibienen

Ein aus den fleißigen Bienen mutierter Insektenstamm, die nachtaktiven „Abibienen", wurde im Jahr 2009 auf der Insel „Bremensia" über einen längeren Zeitraum von Abibienenforschern beobachtet:

Die 1200 Abibienen verteilten sich jeden Morgen gegen acht Uhr auf einen ihrer drei Erholungsplätze, genannt A, B, C.

Um das tägliche Wanderverhalten der Abibienen zwischen den drei Erholungsplätzen zu erforschen, fingen die Forscher alle 1200 Abibienen ein und versahen je ein Drittel von ihnen mit einer eindeutigen Markierung für jeweils einen der drei Plätze A, B oder C.

Am Morgen des $0.$ Tages ihrer Untersuchung setzten die Forscher je 400 Abibienen an den drei Erholungsplätzen entsprechend ihrer Markierungen aus. Nun zählten die Forscher am folgenden Morgen ($1.$ Tag), wie viele Abibienen zu ihrem Erholungsplatz zurückgekehrt und wie viele einen anderen Erholungsplatz aufgesucht hatten. Ihre Ergebnisse fassten sie im nebenstehenden Übergangsdiagramm zusammen.



Erstaunlicherweise fanden die Abibienenforscher auch an den weiteren Tagen das Übergangsdiagramm bestätigt. Gehen Sie daher im Folgenden davon aus, dass sich die Abibienen täglich entsprechend dem Übergangsdiagramm auf die drei Erholungsplätze verteilen.

a) Berechnen Sie anhand des Übergangsdiagramms, wie viele Abibienen am $1.$ Tag am Platz C gezählt wurden.

Vervollständigen Sie die Matrix $U = \begin{pmatrix} 0,70 & 0,04 & 0,10 \\ 0,10 & ... & ... \\ 0,20 & ... & ... \end{pmatrix}$ zu einer zum Übergangsdiagramm gehörigen Übergangsmatrix.

Erläutern Sie die Bedeutung der Werte in der ersten Zeile von U für das Wanderverhalten der Abibienen.

Verwenden Sie im folgenden die Übergangsmatrix $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,10 & 0,10 \\ 0,06 & 0,80 & 0,20 \\ 0,04 & 0,10 & 0,70 \end{pmatrix}$, die ebenfalls das Wanderverhalten beschreibt.

b) Berechnen Sie den Vektor $\vec{v}_1 = M * \begin{pmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}$.

Interpretieren Sie seine Komponenten auf das Problem bezogen.

c) Bestimmen Sie die stationäre Abibienenverteilung der Matrix M.

Bei ihren Untersuchungen in 2009 zählten die Forscher, bevor sie ihren oben beschriebenen Eingriff starteten, an jedem Morgen stets 600 der Tiere an Platz A, 390 an Platz B und die restlichen 210 an Platz C.

Vergleichen Sie diese Verteilung mit der stationären und interpretieren Sie das Ergebnis des Vergleichs.

d) Berechnen Sie für $G = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{13}{40} & \frac{13}{40} & \frac{13}{40} \\ \frac{7}{40} & \frac{7}{40} & \frac{7}{40} \end{pmatrix}$

sowohl $G * \vec{x}$ für jede beliebige Abibienenverteilung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $x + y + z = 1200$

als auch $M * G$.

Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse und erläutern Sie die Bedeutung der Matrix G für das langfristige Abibienenverhalten.

4) Aufgabensammlung NRW (2006), Nr. 22

Ödnis im Osten

Bis zu 50 Prozent seiner heutigen Bevölkerung wird Deutschlands Osten langfristig einbüßen. Diese Prognose wagen Forscher des Leibniz-Instituts für Länderkunde in Leipzig. Nun fordern sie Mut zum gekonnten Schrumpfen. (Stern, November 2004)

Zu Beginn des Jahres 2004 lebten 69,5 Mio Menschen in den westdeutschen Bundesländern (einschließlich Berlin). In den fünf neuen Bundesländern lebten 13,5 Mio Menschen.
Im Laufe des Jahres siedelten 1,2% der Bevölkerung aus den neuen in die alten Bundesländer um. In die umgekehrte Richtung waren es hingegen nur 0,1%.

a) Gib ein Übergangsdiagramm und eine Übergangsmatrix an, die den obigen „Austauschprozess" zwischen den alten Bundesländern (A) und den neuen Bundesländern (N) beschreiben.

b) Es soll nun im Weiteren versucht werden, mit Hilfe der Übergangsmatrix aus Aufgabenteil a) Prognosen über die nähere oder fernere Entwicklung der Bevölkerungsverteilung in Deutschland zu erstellen.
Nenne Schwachpunkte dieses Prognosemodells und gib an, welche Annahmen man für alle folgenden Überlegungen zu Grunde legen müsste.

c) Berechne die prognostizierten Bevölkerungszahlen in A und N für die Jahre 2005 und 2006.

d) Berechne für die Übergangsmatrix M die Potenzen M^2 und M^3.
Interpretiere die Koeffizienten von M^2 im Problemkontext und nutze dein Ergebnis zur Kontrolle von Aufgabenteil c).

e) Ermittle in deinem groben Prognosemodell eine stabile Grenzverteilung der Einwohnerzahlen und vergleiche dein Ergebnis mit der einleitenden Stern-Meldung.

f) Berechne einen Wert für die Abwanderungsquote aus den neuen Bundesländern, der erreicht werden müsste, damit bei gleichbleibender Zuwanderungsquote aus den alten Bundesländern langfristig eine Bevölkerungszahl von 10 Mio nicht unterschritten wird.

5) Der Verlauf des Flusses Tiexonas wird durch die Funktion $f(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}5x^2 + 4{,}8x$ mit $-1 \leq x \leq 11$ beschrieben. Die x-Achse und die y-Achse sind Straßen, die genau von Westen nach Osten bzw. von Süden nach Norden verlaufen. Eine Einheit entspricht 1 km.

a) Bestimme rechnerisch die Punkte, wo die Straßen den Fluss überqueren.

b) Berechne die Koordinaten der Punkte, wo der Fluss seine südlichste bzw. nördlichste Stelle im Bereich $-1 \leq x \leq 11$ erreicht.

c) Bestimme die Bereiche, in denen sich der Fluss nach rechts krümmt.

d) Der Fluss schließt mit der x-Achsen-Straße eine Fläche ein. Bestimme die Größe dieser Fläche.

e) Die Regierung möchte einen Kanal bauen, um Wasser aus dem Fluss für die Landwirtschaft abzuleiten. Der Kanal soll die Form einer Tangente an den Fluss durch den Punkt $P(1/f(1))$ haben. Er soll von P aus Richtung Nordosten verlaufen.

(i) Bestimme rechnerisch eine Funktionsgleichung, welche den Kanal beschreibt

(ii) Der Kanal reicht bis $Q(5/y)$. Bestimme rechnerisch die Länge des Kanals.

6) Die Funktion $f(x) = 0{,}2x^3 - 3{,}6x^2 + 16{,}2x + 2$ mit $-1 \leq x \leq 11$ beschreibt den Verlauf einer Straße, die vom Ort A $(-1 / f(-1))$ zum Ort B $(11 / f(11))$ führt.
Die x-Achse und die y-Achse sind Wasserkanäle, die genau von Westen nach Osten bzw. von Süden nach Norden führen. Eine Längeneinheit entspricht 1 Km.

a) Berechne die Koordinaten der Punkte, wo die Straße die Kanäle überquert.

b) Bestimme, ob der Ort C $(4/20)$ auch auf der Route der Straße liegt.

c) Berechne die Koordinaten der Punkte, wo die Straße ihre südlichste bzw. nördlichste Stelle im Bereich $-1 \leq x \leq 11$ erreicht.

d) Herr Tiex fährt von B kommend und nach A fahrend auf der Straße. Bestimme die Bereiche, wo Herr Tiex sein Lenkrad nach rechts bzw. nach links lenken muss.

e) Ein anderes Mal befindet sich Herr Tiex auf dem Punkt D $(2 / f(2))$. Bestimme, wie weit er von dort aus genau nach Osten gehen müsste, um die Straße wieder zu erreichen.

f) Ein anderes Mal befindet sich Herr Tiex auf dem Punkt E $(1{,}5 / f(1{,}5))$. Von dort geht er entlang der Geraden $g(x) = -2x + 21{,}875$ nach Südosten. Bestimme, ob er zuerst die Straße oder einen Kanal erreicht.

7) Abitur Bremen 2007

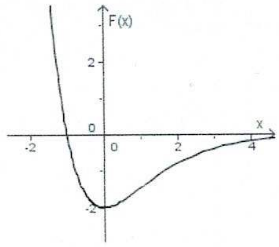
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x}$ und deren Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = -x \cdot e^{-x}$.

a) Berechnen Sie Nullstellen und Extrempunkte der Funktion f.

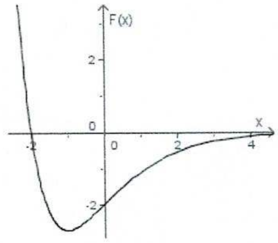
b) Zeigen Sie, dass der Graph von f genau einen Wendepunkt besitzt.

c) Zeichnen Sie den Graphen von f.

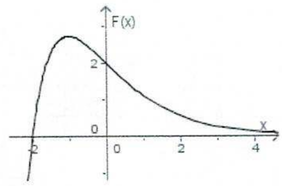
d) Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = (-x-2) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Einer der folgenden drei Graphen stellt diese Stammfunktion dar.
Entscheiden und begründen Sie, welcher das ist.



Graph 1



Graph 2



Graph 3

e) Für $x \leq 0$ schließt der Graph von f mit der x-Achse und der y - Achse eine Fläche ein.
Zeichnen Sie die Fläche in der Zeichnung aus c) ein.
Berechnen Sie die Maßzahl A dieser Fläche (Ergebnis auf zwei Nachkommastellen runden).

f) Begründen Sie, dass die Fläche rechts von der y-Achse zwischen dem Graphen von f und der x-Achse nicht größer werden kann als 2 Flächeneinheiten.