LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) gesucht: Maximum

$$f'(x) = 0{,}54 \cdot x \cdot e^{-0{,}12x} + 0{,}27x^2 \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= 0{,}54\,x\,e^{-0{,}12x} + (-0{,}0324\,x^2) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= (-0{,}0324\,x^2 + 0{,}54\,x) \cdot e^{-0{,}12x}$$

$$f''(x) = (-0{,}0648\,x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x} + (-0{,}0324\,x^2 + 0{,}54x) \cdot (-0{,}12) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= (-0{,}0648\,x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x} + (0{,}003888\,x^2 - 0{,}0648\,x) \cdot e^{-0{,}12x}$$
$$= (0{,}003888\,x^2 - 0{,}1296\,x + 0{,}54) \cdot e^{-0{,}12x}$$

N.B.: $f'(x) = 0$

$$(-0{,}0324\,x^2 + 0{,}54\,x) \cdot e^{-0{,}12x} = 0$$

(GTR ...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 16{,}\overline{6}$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(0) = 0{,}54 > 0 \Rightarrow TP$

$f''(16{,}\overline{6}) = -0{,}073 < 0 \Rightarrow HP$

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(16{,}\overline{6}) = 10{,}15$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

Das Maximum wird nach $16\frac{2}{3}$ min erreicht mit 10,15 Personen pro Minute.

b) $f(x)=3$

$0{,}27x^2e^{-0{,}12x}=3$

GTR...

$x_1=4{,}3195$

$x_2=42{,}3774$

Es gilt: $f(0)=0$

$f(16{,}\overline{6})=10{,}15$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

Im Zeitraum vom Anfang bis etwa zur 4. Minute und nach der 42. Minute kommen weniger als 3 Personen pro Minute.

c) ① $g'(x)=0-((4{,}5x+37{,}5)\cdot e^{-0{,}12x}+(2{,}25x^2+37{,}5x+312{,}5)\cdot(-0{,}12)\cdot e^{-0{,}12x})$

$=-((4{,}5x+37{,}5)\cdot e^{-0{,}12x}+(-0{,}27x^2-4{,}5x-37{,}5)\cdot e^{-0{,}12x})$

$=-((-0{,}27x^2)\cdot e^{-0{,}12x})$

$=0{,}27x^2\cdot e^{-0{,}12x}$

$=f(x)$

$\Rightarrow$ g ist Stammfunktion von f

II $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(312{,}5 - \underbrace{(2{,}25x^2 + 37{,}5x + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}12x}}_{\text{läuft gegen } 0} \right)$

$= 312{,}5$

Es sind $312{,}5 \approx 312$ Personen.

d) I Anzahl der wartenden Personen:

$F(20) = 134{,}466$

Nach $x = 20$ kommen noch weitere Personen. Diese sind aber erst nach den schon wartenden Personen dran.

$134{,}466 : 6 = 22{,}411$

$\Rightarrow$ Es sind ca. 22 Minuten

II Jetzt müssen die neu dazugekommenen nach 19:20 Uhr mit berücksichtigt werden.

$F(x)$: Zahl der Personen, die insgesamt zum Zeitpunkt x gekommen sind (die draußen warten oder schon im Kino sind)

x: Zeit in min ab 19 Uhr

$g(x) = 6 \cdot (x - 20)$

Zahl der Personen, die insgesamt schon im Kino sind

x: Zeit in min ab 19 Uhr

$x \geq 20$. Wir müssen $x - 20$ als Faktor verwenden, damit x weiter die Zeit in min ab 19 Uhr sein kann

$h(x) = F(x) - 6 \cdot (x-20)$, $x \geq 20$

Anzahl der Personen, die vor dem Kino stehen zur Zeit x

gesucht: Max. von h

$$h(x) = 312,5 - (2,25x^2 + 37,5x + 312,5) \cdot e^{-0,12x} - 6(x-20)$$

$$= -(2,25x^2 + 37,5 + 312,5) e^{-0,12x} - 6x + 432,5$$

$$h'(x) = 0,27x^2 e^{-0,12x} - 6$$

$$h''(x) = (-0,0324x^2 + 0,54x) \cdot e^{-0,12x}$$

N.B.: $h'(x) = 0$

$0,27x^2 e^{-0,12x} = 6$

(GTR...)

$x_1 = -3,7616$ | außerhalb des

$x_2 = 7,3087$ | Def. bereichs

$x_3 = 31,8373$

H.B.: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$h''(31,83) \approx -0,34 < 0 \Rightarrow$ HP

Ränder: $h(20) = 134,466$

$h(31,83) = 158,474$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ Die größte Zahl wird nach 31,83 min erreicht mit $158,47 \approx 158$ Wartenden.

(III) gesucht: Nullstellen

$h(x) = 0$

(GTR...)

$x_1 = -9{,}37$ (außerhalb des Def. bereichs)

$x_2 = 71{,}635$

$\Rightarrow$ Die Schlange hat sich nach 71,635 min aufgelöst.

e) $h_{neu}(x) = F(x) - a \cdot (x-50)$

Wir benutzen $(x-50)$, da der Kartenverkauf erst um 19:50 Uhr beginnt. Gesucht ist a. Die Schlange soll um 20:30 abgebaut sein, also nach 90 min.

$h_{neu}(90) = 0$

$F(90) - a(90-50) = 0$

$312{,}5 - (2{,}25 \cdot 90^2 + 37{,}5 \cdot 90 + 312{,}5) \cdot e^{-0{,}17 \cdot 90} - 40a = 0$

$312{,}053 - 40a = 0$

$a = 7{,}8$

$\Rightarrow$ Es müssen 7,8 Personen pro Minute sein.

2 a) $x^3 - a^2x = 0$

$x(x^2 - a^2) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x^2 - a^2 = 0$

$x^2 = a^2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2 = a$

$x_3 = -a$

Fallunterscheidung:

$a = 0$
eine NS
$x = 0$

$a \neq 0$
drei NS
$x_1 = -a$
$x_2 = 0$
$x_3 = a$

b) N.B.: $f_a'(x) = 0$

$f_a'(x) = 3x^2 - a^2$

$3x^2 - a^2 = 0$

$3x^2 = a^2$

$x^2 = \frac{a^2}{3} \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$

H.B.: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(x) = 6x$

$f_a''\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \neq 0$ für $a \neq 0$

$$f_a''\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = 6 \cdot \frac{-a}{\sqrt{3}} \neq 0 \text{ für } a \neq 0$$

Fallunterscheidung:

① $a > 0$ Extremstellen

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ TP

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ HP

② $a < 0$ Extremstellen

$x_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}$ HP

$x_2 = -\frac{a}{\sqrt{3}}$ TP

③ $a = 0 \Rightarrow f(x) = x^3$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt bei $x = 0$

y-Werte:

$$f_a\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 - a^2 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{3}^3} - \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{a^3}{\sqrt{3}^3} - \frac{3a^3}{\sqrt{3}^3}$$

$$= \frac{-2a^3}{(\sqrt{3})^3}$$

$$\Rightarrow E_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}} \Big/ -\frac{2}{(\sqrt{3})^3} \cdot a^3\right)$$

$$f_a\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3 - a^2 \cdot \left(-\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{a^3}{(\sqrt{3})^3} + \frac{a^3}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{a^3}{\sqrt{3}^3} + \frac{3a^3}{\sqrt{3}^3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}^3} a^3$$

$$\Rightarrow E_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}} \Big/ \frac{2}{\sqrt{3}^3} a^3\right)$$

c) zu E_1: $\frac{a}{\sqrt{3}} = x$

$$a = \sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot (\sqrt{3}x)^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot (\sqrt{3})^3 \cdot x^3 = -2x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^3$$

zu E_2: $-\frac{a}{\sqrt{3}} = x$

$$-a = \sqrt{3}x$$

$$a = -\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot (-\sqrt{3}x)^3 = \frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot (-\sqrt{3})^3 \cdot x^3 = -2x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = -2x^3$$

Ergebnis: $O(x) = -2x^3$, $x \neq 0$

d) $x^3 - (a_1)^2 x = x^3 - (a_2)^2 x \quad | -x^3$

$-(a_1)^2 x = -(a_2)^2 x$

$(a_2)^2 x - (a_1)^2 x = 0$

$x \cdot \underbrace{(a_2^2 - a_1^2)}_{\neq 0} = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow y = 0$

Ergebnis: Der Punkt $P(0/0)$ gehört allen Funktionen der Schar an.

e) $f_a(a) = a^3 - a^2 \cdot a = a^3 - a^3 = 0$

$\Rightarrow A(a/0)$

$f_a'(x) = 3x^2 - a^2$

$f_a'(a) = 3a^2 - a^2 = 2a^2$

$\Rightarrow t(x) = 2a^2 \cdot x + b$

$A(a/0)$ auf t $\Rightarrow t(a) = 0$

$2a^2 \cdot a + b = 0$

$2a^3 + b = 0$

$b = -2a^3$

$\Rightarrow t(x) = 2a^2 \cdot x - 2a^3$

f) Nullstellen (aus Teil a):

$x_1 = -2 \qquad x_3 = 0$

$x_2 = 2$

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^3 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^{0}$$
$$= 4$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x^3 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= -4$$

$A_{links} = 4$ FE

$A_{rechts} = 4$ FE

$\Rightarrow A_{gesamt} = A_{links} + A_{rechts} = 8$ FE

g) $A = \frac{-x \cdot y}{2}$ (Hauptbed.)

$y = x^3 - 4x$ (Nebenbed.)

$$A(x) = \frac{-x \cdot (x^3 - 4x)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(-x^4 + 4x^2)$$
$$= -0{,}5x^4 + 2x^2$$

N.B.: $A'(x) = 0 \qquad A'(x) = -2x^3 + 4x$

$-2x^3 + 4x = 0$

(GTR ...)

$x_1 = 0$
$x_2 = \sqrt{2}$ (liegt im 1. Quadranten)
$x_3 = -\sqrt{2}$

H.B.: $A'(x) = 0$ und $A''(x) \neq 0$
$A''(x) = -6x^2 + 4$
$A''(0) = 4 \Rightarrow$ TP
$A''(-\sqrt{2}) = -8 \Rightarrow$ HP

Ränder: einzige ES innerhalb des Def. bereichs
(x = 0 liegt genau auf dem Rand)

y-Wert:

$$y = (-\sqrt{2})^3 - 4 \cdot (-\sqrt{2}) = -(\sqrt{2})^3 + 4 \cdot \sqrt{2}$$
$$= -2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{2}$$
$$= 2 \cdot \sqrt{2}$$

$\Rightarrow P(-\sqrt{2} / 2 \cdot \sqrt{2})$

h) $A = \frac{\text{Breite unten} \cdot f(x)}{2}$

$A = \frac{2 \cdot f(x)}{2} = f(x)$

P muss der Extrempunkt sein. Also (nach g):

$x = -\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1,15$
$y = \frac{2}{\sqrt{3}^3} \cdot 2^3 \approx 3,08$

$\Rightarrow P(-1,15 / 3,08)$

i) $x^3 - 4x = bx$

$x^3 - 4x - bx = 0$

$x^3 - (4+b)x = 0$

$x(x^2 - (4+b)) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 = 4+b \quad | \sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{4+b}$

$4 + b = 0$

$b = -4$

Fallunterscheidung:

$b \leq -4$
ein Schnittpunkt
$x = 0$

$b > -4$
drei Schnittpunkte
$x_1 = -\sqrt{4+b}$
$x_2 = 0$
$x_3 = \sqrt{4+b}$

y-Werte:

$g_b(0) = 0 \Rightarrow S_1(0/0)$

$g_b(-\sqrt{4+b}) = -b \cdot \sqrt{4+b}$

$\Rightarrow S_2(-\sqrt{4+b} / -b \cdot \sqrt{4+b})$

$g_b(\sqrt{4+b}) = b \cdot \sqrt{4+b}$

$\Rightarrow S_3(\sqrt{4+b} / b \cdot \sqrt{4+b})$

3) a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(0) = 6600 \Rightarrow \quad d = 6600$

$f(1) = 9000 \Rightarrow a + b + c + d = 9000$

$f(3) = 6600 \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 6600$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + 2b + c = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 9000 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 6600 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6600 \end{array}\right)$$

GTR...

$a = 600$

$b = -3600$

$c = 5400$

$d = 6600$

Kontrolle der hinr. Bed.:

$f(x) = 600x^3 - 3600x^2 + 5400x + 6600$

$f'(x) = 1800x^2 - 7200x + 5400$

$f''(x) = 3600x - 7200$

$f''(1) = 3600 - 7200 = -3600 < 0$

$\Rightarrow$ HP bei $x = 1$ ✓

b) $f_k(2) = 22.200 - 4k$

$f_k(3) = 39.000 - 9k$

Es gilt $3550 \leq k \leq 3600$

$\Rightarrow$ Der kleinste Wert ergibt sich für $k = 3600$ und der größte für 3550

$x = 2$

kleinster Wert: $22.200 - 4 \cdot 3600$
$= 22.200 - 14.400$
$= 7800 \frac{m^3}{s}$

größter Wert: $22.200 - 4 \cdot 3550$
$= 22.200 - 14.200$
$= 8000 \frac{m^3}{s}$

$x = 3$

kleinster Wert: $39.000 - 9 \cdot 3600$
$= 39.000 - 32.400$
$= 6600 \frac{m^3}{s}$

größte Wert: $39.000 - 9 \cdot 3550$
$= 39.000 - 31.950$
$= 7050 \frac{m^3}{s}$

c) gegeben: $x = \frac{k}{1800}$

$f_k'(x) = 1800 x^2 - 2kx + 5400$

$f_k''(x) = 3600 x - 2k$

$f_k''\left(\frac{k}{1800}\right) = 3600 \cdot \frac{k}{1800} - 2k = 0$

$\Rightarrow$ NB erfüllt

$f_k'''(x) = 3600$

$\Rightarrow f_k'''\left(\frac{k}{1800}\right) = 3600 \neq 0$

$\Rightarrow$ HB erfüllt

$\Rightarrow x = \frac{k}{1800}$ ist Wendestelle

Fließgeschwindigkeit:

$$f_k\left(\frac{k}{1800}\right) = 600 \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^3 - k \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^2 + 5400 \cdot \frac{k}{1800} + 6600$$

$$= 600 \cdot \frac{k^3}{1800^3} - k \cdot \frac{k^2}{1800^2} + 3k + 6600$$

$$= \frac{k^3}{9720000} - \frac{k^3}{3240000} + 3k + 6600$$

$$= -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600$$

Der Wendepunkt gibt den Moment der größten Abnahme der Fließgeschwindigkeit an.

d) $x_W = \frac{k}{1800}$

$y_W = -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600$

$x = \frac{k}{1800}$

$k = 1800x$

$$\Rightarrow y = -\frac{(1800x)^3}{4860000} + 3 \cdot 1800x + 6600$$

$$= -\frac{1800^3}{4860000} x^3 + 5400x + 6600$$

$= -1200x^3 + 5400x + 6600$

e) $g_k(x) = f_k(x) \cdot 3600$ (da $1h = 3600\,s$)

$= (600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600) \cdot 3600$

$= 2160000x^3 - 3600kx^2 + 19440000x + 23760000$

$$\text{Wasser} = \int_0^1 g_k(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 2160000x^3 - 3600kx^2 + 19440000x + 23760000\,dx$$

$$= \left[540000x^4 - 1200kx^3 + 9720000x^2 + 23760000x\right]_0^1$$

$$= 540000 - 1200k + 9720000 + 23760000 - 0$$

$$= 34020000 - 1200k$$

Es gilt: $3550 \leq 8 \leq 3600$

Also:

$$34020000 - 3600 \cdot 1200 \leq \text{Wasser} \leq 34020000 - 3550 \cdot 1200$$

$$29.700.000 \leq \text{Wasser} \leq 29.760.000$$

4a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f(1) = 0{,}05 \Rightarrow a + b + c + d = 0{,}05$

$f(0) = 0{,}05 \Rightarrow d = 0{,}05$

$f(0{,}5) = 0{,}175 \Rightarrow 0{,}125a + 0{,}25b + 0{,}5b + d = 0{,}175$

$f''(1) = -2 \Rightarrow 6a + 2b = -2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0{,}05 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 0{,}175 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}05 \end{array}\right)$$

(GTR...)

$a = -\frac{1}{3}$

$b = 0$

$c = \frac{1}{3}$

$d = 0{,}05$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{20}$

Wir müssen keine HB prüfen.

b) $f_k(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0 + k \cdot 0 + \frac{1}{20} = \frac{1}{20}$

$f_k(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1 + k + \frac{1}{20} = -\frac{17}{60} + k$

Es gilt: $0{,}33 \leq k \leq 0{,}5$

$\Rightarrow -\frac{17}{60} + 0{,}33 \leq f_k(1) \leq -\frac{17}{60} + 0{,}5$

$0{,}04\overline{6} \leq f_k(1) \leq 0{,}21\overline{6}$

Ergebnis: oben: $\frac{1}{20}\,m = 5\,cm$

unten: zwischen $0{,}04\overline{6}\,m$ und $0{,}21\overline{6}\,m$

$4{,}\overline{6}\,cm$ und $21{,}\overline{6}\,cm$

c) $f_k(x) = -\frac{1}{3}x^3 + kx + \frac{1}{20}$

$f_k'(x) = -x^2 + k$

$f_k''(x) = -2x$

N.B.: $f_k'(x) = 0$

$-x^2 + k = 0$

$x^2 = k$

$x = \pm\sqrt{k}$

H.B.: $f_k'(x) = 0$ und $f_k''(x) \neq 0$

$f_k''(\sqrt{k}) = -2\sqrt{k} < 0 \Rightarrow HP$

$f_k''(-\sqrt{k}) = 2\sqrt{k} > 0 \Rightarrow TP$

Ränder:

$f_k(0) = 0{,}05$

$f_k(\sqrt{k}) = -\frac{1}{3}\sqrt{k}^3 + k\sqrt{k} + 0{,}05$

$= \frac{2}{3}k\sqrt{k} + 0{,}05$

$f_k(1) = -\frac{17}{60} + k$

Es gilt: $\frac{2}{3} s\sqrt{s} + 0{,}05 > s - \frac{17}{60}$

für $0{,}33 \leq s \leq 0{,}5$

d) $HP\left(\sqrt{s} \,/\, \frac{2}{3} s\sqrt{s} + \frac{1}{20}\right)$

$x_h = \sqrt{s}$

$s = x^2$

$y_h = \frac{2}{3} s\sqrt{s} + \frac{1}{20}$

$y = \frac{2}{3} x^2 \cdot \sqrt{x^2} + \frac{1}{10}$

$= \frac{2}{3} x^2 \cdot x + \frac{1}{20}$

$= \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{20}$

$\Rightarrow o(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{20}$

e) $f_{\frac{1}{3}}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{20}$

$V_{Balken} = 1 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}36 = 0{,}1296\ m^3$

$V_{Pfosten} = \pi \cdot \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{20}\right)^2 dx$

$= \pi \cdot \int_0^1 \left(\frac{1}{9}x^6 - \frac{2}{9}x^4 - \frac{1}{30}x^3 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{30}x + \frac{1}{400}\right) dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{1}{63}x^7 - \frac{2}{45}x^5 - \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{60}x^2 + \frac{1}{400}\right]_0^1$

$\approx 0{,}0606$

$V_{Abfall} = V_{Balken} - V_{Pfosten} = 0{,}0690$

Das Volumen des Abfalls ist größer als das Volumen des Pfostens.

5a) $f(x) = a \cdot e^{kx}$

$f(0) = 0{,}1 \Rightarrow a \cdot e^{k \cdot 0} = 0{,}1$

$a = 0{,}1$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}1 \cdot e^{kx}$

$f(4) = 5 \Rightarrow 0{,}1 \cdot e^{4k} = 5 \quad | \cdot 10$

$e^{4k} = 50$

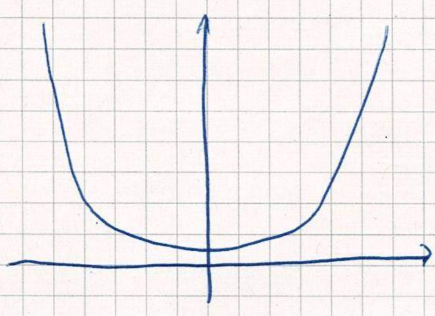
$4k = \ln(50)$

$k = \frac{\ln(50)}{4}$

$k \approx 0{,}978 \approx 0{,}98$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}1 \cdot e^{0{,}98x}$

b)



Der linke und der rechte Teil der Bahn sind symmetrisch zur y-Achse

$f(x) = 0{,}1 \cdot e^{0{,}98x}$

$f'(x) = 0{,}1 \cdot 0{,}98 \cdot e^{0{,}98x}$

$= 0{,}098\, e^{0{,}98x}$

$= 0{,}1\, e^{0{,}98x}$

$g(x) = 0{,}1 \cdot e^{-0{,}98x}$

$g'(x) = 0{,}1 \cdot (-0{,}98) \cdot e^{0{,}98x}$

$= -0{,}098\, e^{0{,}98x}$

$= -0{,}1\, e^{0{,}98x}$

Es gilt:

$f'(0) = 0{,}1$

$g'(0) = -0{,}1$

$\Rightarrow$ Der Übergang bei $x = 0$ wäre nicht knickfrei

$\Rightarrow$ nicht geeignet

c) $h(0) = 0{,}05 \cdot (e^0 + e^0) = 0{,}1$

$h(4) = 0{,}05 \cdot (e^{1{,}15 \cdot 4} + e^{-1{,}15 \cdot 4})$

$\approx 0{,}05 \cdot 99{,}49$

$= 4{,}97\ldots$

≈ 5

$h(-4) = 0{,}05 \cdot (e^{1{,}15 \cdot (-4)} + e^{-1{,}15 \cdot (-4)})$

≈ 5

$\Rightarrow$ Die Kriterien werden näherungsweise erfüllt

$h(x) = 0{,}05 e^{1{,}15x} + 0{,}05 \cdot e^{-1{,}15x}$

$h'(x) = 0{,}05 \cdot (1{,}15) \cdot e^{1{,}15x} + 0{,}05 \cdot (-1{,}15) \cdot e^{-1{,}15x}$

$= 0{,}0575\, e^{1{,}15x} - 0{,}0575 \cdot e^{-1{,}15x}$

$\approx 0{,}06\, e^{1{,}15x} - 0{,}06\, e^{-1{,}15x}$

$= 0{,}06 \cdot (e^{1{,}15x} - e^{-1{,}15x})$

$h''(x) = 0{,}06 \cdot 1{,}15 \cdot e^{1{,}15x} + 0{,}06 \cdot 1{,}15 \cdot e^{-1{,}15x}$

$= 0{,}07\, e^{1{,}15x} + 0{,}07\, e^{-1{,}15x}$

N.B.: $h'(x) = 0$

$0{,}06 \cdot (e^{1{,}15x} - e^{-1{,}15x}) = 0$

(GTR...)

$x = 0$

H.B.: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$h''(0) = 0{,}14 > 0 \Rightarrow$ TP

y-Wert: $h(0) = 0{,}1$

$\Rightarrow$ TP $(0 \mid 0{,}1)$

d) Erfüllt h die Bedingung $m \approx 2$?
zu untersuchen: $h'(3{,}05) \approx 2$

$h'(3{,}05) \approx 2$ ✓

Bestimmung der Geradengleichung:

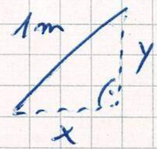
$$i(x) = 2x + b$$

$B(3{,}05 / 1{,}67)$ auf i $\Rightarrow$ $i(3{,}05) = 1{,}67$

$$2 \cdot 3{,}05 + b = 1{,}67$$
$$6{,}1 + b = 1{,}67$$
$$b = -4{,}43$$

$\Rightarrow$ $i(x) = 2x - 4{,}43$

Die Rampe ist 1 m lang:

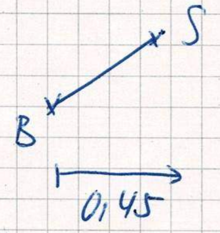


Die Gerade hat die Steigung 2
$\Rightarrow$ $y = 2 \cdot x$

Pythagoras: $x^2 + y^2 = 1$

$$x^2 + (2x)^2 = 1$$
$$x^2 + 4x^2 = 1$$
$$5x^2 = 1$$
$$x^2 = 0{,}2$$
$$x = \pm\sqrt{0{,}2}$$ (nur $+\sqrt{0{,}2}$ kommt in Betracht)
$$x = \sqrt{0{,}2}$$
$$x \approx 0{,}45$$

$\Rightarrow$



$B(3{,}05 / 1{,}67)$

$S(x_s / y_s)$

$x_s = 3{,}05 + 0{,}45 = 3{,}5$

$y_s = i(3{,}5) = 2 \cdot 3{,}5 - 4{,}43 = 2{,}57$

$\Rightarrow S(3{,}5 / 2{,}57)$

e) $H(x) = \frac{0{,}05}{1{,}15} e^{1{,}15x} + \frac{0{,}05}{-1{,}15} e^{-1{,}15x}$

$= \frac{1}{23} e^{1{,}15x} - \frac{1}{23} e^{-1{,}15x}$

$Holz = \int_{-4}^{4} h(x)\,dx = \left[H(x)\right]_{-4}^{4} \approx \underline{8{,}65 \text{ m}^2}$