LÖSUNGEN (Teil 4)

1a) $f(x) = 0$

$x^3 - 9x^2 + 24x - 10 = 0$

(GTR ...)

$x \approx 0{,}51$

b) N.B.: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0$

(GTR ...)

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 18$

$f''(2) = -6 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = 2$

$f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow$ TP bei $x = 4$

Ränder: $f(0) = -10$

$f(2) = 10$

$f(4) = 6$

$f(5) = 10$

tiefster Punkt: $A(0|-10)$

höchste Punkte: $B(2|10)$

$C(5|10)$

c)

Es gilt: $\tan 10° = f'(x)$

$0{,}1763 = f'(x)$

zu lösen: $f'(x) = 0{,}1763$

$3x^2 - 18x + 24 = 0{,}1763$

(GTR ...)

$x_1 = 1{,}97$

$x_2 = 4{,}03$

y-Werte:

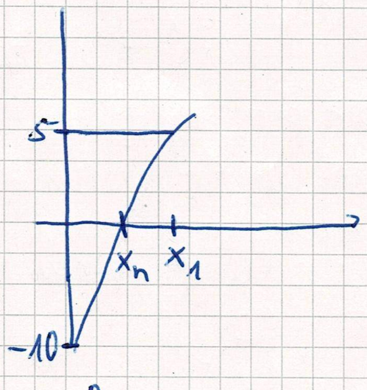
$f(1{,}97) = 9{,}997$

$f(4{,}03) = 6{,}003$

$\Rightarrow P_1 (1{,}97 / 9{,}997)$

$P_2 (4{,}03 / 6{,}003)$

d)



zu suchen: x_1

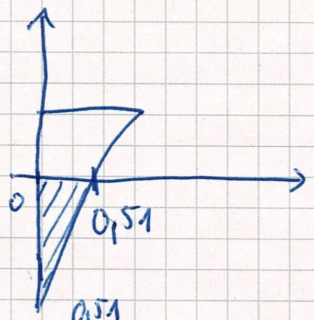
$f(x_1) = 5$

$x^3 - 9x^2 + 24x - 10 = 5$

(GTR ...)

$x = 0{,}896$

Es gilt: $x_n = 0{,}51$ (Aufgabenteil a)



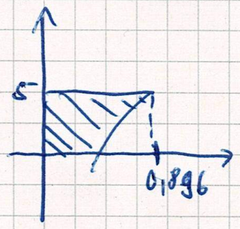
$$\int_0^{0,51} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{0,51} x^3 - 9x^2 + 24x - 10\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 10x\right]_0^{0,51}$$

$$= -2,36$$

$$\Rightarrow A_{///} = 2,36 \text{ FE}$$



$$A_{\backslash\backslash\backslash} = A_{Rechteck} - \int_{0,51}^{0,896} f(x)\,dx$$

$$= 5 \cdot 0,896 - \int_{0,51}^{0,896} x^3 - 9x^2 + 24x - 10\,dx$$

$$= 4,48 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 10x\right]_{0,51}^{0,896}$$

$$= 4,48 - 1,037$$

$$= 3,443$$

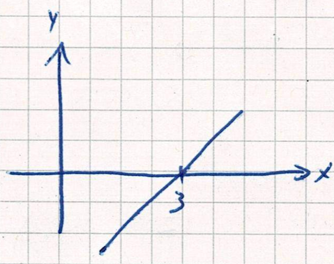
$$A_{gesamt} = A_{///} + A_{\backslash\backslash\backslash} = 2,36 + 3,443 = \underline{5,803 \text{ FE}}$$

e) $0 \leq x < 2$ streng mo. wachsend

$2 < x < 4$ " " fallend

$4 < x \leq 5$ " " wachsend

f) Wir zeichnen die Funktion $f''(x) = 6x - 18$ mit dem Graphik-Programm des GTR. Mit dem Root-Befehl erfährt man, dass $x = 3$ eine Nullstelle von f'' ist.



Für $x > 3$ ist f'' positiv,
für $x < 3$ negativ

Rechtskrümmung bedeutet: $f''(x) < 0$
Daher: Rechtskrümmung liegt bei $x < 3$ vor.

g)
$$\int_1^a f(x)\,dx = \int_1^a x^3 - 9x^2 + 24x - 10\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 + 12x^2 - 10x\right]_1^a$$
$$= \frac{1}{4}a^4 - 3a^3 + 12a^2 - 10a - \left(\frac{1}{4} - 3 + 12 - 10\right)$$
$$= \frac{1}{4}a^4 - 3a^3 + 12a^2 - 10a - (-0{,}75)$$

$= \frac{1}{4}a^4 - 3a^3 + 12a^2 - 10a + 0{,}75$

Es gilt: $\frac{1}{4}a^4 - 3a^3 + 12a^2 - 10a + 0{,}75 = 32$

(GTR ...)

$a_1 = -1{,}13$ (außerhalb des Def.bereichs und $a_1 < 1$)

$a_2 = 5$

$\Rightarrow a = 5$

h) $t(x) = mx + b$

$m = f'(1) = 9$

$\Rightarrow t(x) = 9x + b$

$P(1 \mid f(1)) = P(1 \mid 6)$

$P(1|6)$ auf $t \Rightarrow t(1) = 6$

$9 \cdot 6 + b = 6$

$54 + b = 6$

$b = -48$

$\Rightarrow t(x) = 9x - 48$

$n(x) = m_1 x + b_1$

$m \cdot m_1 = -1$

$9 \cdot m_1 = -1$

$m_1 = -\frac{1}{9}$

$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{9}x + b_1$

$P(1|6)$ auf $n \Rightarrow n(1) = 6$

$-\frac{1}{9} + b_1 = 6$

$b_1 = 6\frac{1}{9} = \frac{55}{9}$

$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{9}x + \frac{55}{9}$

2a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Min. bei $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$

$12a + 4b + c = 0$

Max. bei $x = -4 \Rightarrow f'(-4) = 0$

$48a - 8b + c = 0$

$A(1|-18)$ auf $f \Rightarrow f(1) = -18$

$a + b + c + d = -18$

$B(3|-16)$ auf $f \Rightarrow f(3) = -16$

$27a + 9b + 3c + d = -16$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 12 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 48 & -8 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -18 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & -16 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$a = 1$

$b = 3$

$c = -24$

$d = 2$

hinr. Bed.: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(2) = 12 + 6 = 18 > 0 \Rightarrow TP$ ✓

$f''(-4) = -24 + 6 = -18 < 0 \Rightarrow HP$ ✓

b) Man verändert den Term folgendermaßen:

$g(x) = (x-4)^3 + 3(x-4)^3 - 24(x-4) + 2 - 1$

$= (x-4)^3 + 3(x-4)^3 - 24(x-4) + 1$

Die Addition von 1 verschiebt um 1 nach oben. Die Ersetzung von x durch x−4 verschiebt um 4 nach rechts.

c) $h(x) = ax + b$

$h'(x) = a$

Es gilt: $h(3) = f(3) = -16$

$h'(3) = f'(3) = 21$

$\Rightarrow h(x) = 21x + b$

$P(3|-16)$ auf $h \Rightarrow h(3) = -16$

$21 \cdot 3 + b = -16$

$63 + b = -16$

$b = -79$

$\Rightarrow h(x) = 21x - 79$

3a) ① Nullstellen: $x_1 = 0$

$x_2 = 8$

Begründung: $\frac{1}{6}x(x-8)^2 = 0$

$\frac{1}{6}x = 0$ oder $(x-8)^2 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $(x-8)^2 = 0 \mid \sqrt{\ }$

$x - 8 = 0$

$x = 8$

② Extremstellen:

$$f(x) = \frac{1}{6}x\,(x-8)^2$$
$$= \frac{1}{6}x\,(x^2 - 16x + 64)$$
$$= \frac{1}{6}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3}$$

$$f''(x) = x - \frac{16}{3}$$

N.B.: $f'(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} = 0$

(GTR ...)

$x_1 = 2{,}\overline{6}$ $\quad$ $x_2 = 8$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2{,}\overline{6}) = -2{,}\overline{6} < 0 \Rightarrow$ HP

$f''(8) = 2{,}\overline{6} > 0 \Rightarrow$ TP

(III) Wendepunkt:

N.B.: $f''(x) = 0$

$$x - \frac{16}{3} = 0$$

$$x = \frac{16}{3}$$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(x) = 1$$

$$f'''\left(\frac{16}{3}\right) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ WS bei $x = \frac{16}{3}$

y-Wert: $f\left(\frac{16}{3}\right) = 6{,}32$

$\Rightarrow WP\left(\frac{16}{3} \,/\, 6{,}32\right)$

(IV)

gesucht: Funktionswert des Maximums

$$f(2{,}\overline{6}) = 12{,}64$$

$$f(x) = 12{,}642$$

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}x = 12{,}642$$

(GTR ...)

$$x_1 = 2{,}66$$

$$x_2 = 10{,}\overline{6}$$

$\Rightarrow$ für $x > 10{,}\overline{6}$

b)

$g(x) = 2x + 8$

Steigung der Gerade: 2

$f'(x) = 2$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{32}{3} = 2$

(GTR ...)

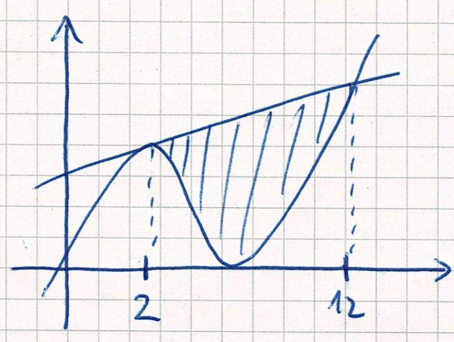
$x_1 = 2$

$x_2 = 8{,}\overline{6}$

$\Rightarrow$ Es gibt 2 Stellen, wo die Tangente die Steigung 2 hätte

$x_1 = 2$	$x_2 = 8{,}\overline{6}$
$t(x) = 2x + b$	$t(x) = 2x + b$
$P(2 \mid f(2)) = P(2 \mid 12)$	$P(8{,}\overline{6} / f(8{,}\overline{6})) = P(8{,}\overline{6} / 0{,}64)$
$P(2 \mid 12)$ auf $t \Rightarrow$	$P(8{,}\overline{6} / 0{,}64)$ auf $t \Rightarrow$
$t(2) = 12$	$t(8{,}\overline{6}) = 0{,}64$
$2 \cdot 2 + b = 12$	$2 \cdot 8{,}\overline{6} + b = 0{,}64$
$4 + b = 12$	$17{,}\overline{3} + b = 0{,}64$
$b = 8$	$b = -16{,}69\overline{3}$
$\Rightarrow t_1(x) = 2x + 8$	$\Rightarrow t_2(x) = 2x - 16{,}69\overline{3}$
$\Rightarrow$ g ist eine Tangente an f	$t_2(x)$ ist die gesuchte Parallele

c)



Bestimmung der Schnittpunkte:

$$f(x) = g(x)$$

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}x = 2x + 8$$

(GTR...)

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 12$$

$$A = \int_2^{12} g(x)\,dx - \int_2^{12} f(x)\,dx$$

$$= \int_2^{12} 2x + 8\,dx - \int_2^{12} \frac{1}{6}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{32}{3}x\,dx$$

$$= \left[x^2 + 8x\right]_2^{12} - \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{8}{9}x^3 + \frac{32}{6}x^2\right]_2^{12}$$

$$= 220 \quad - 81,\overline{1}$$

$$\underline{= 138,\overline{8} \text{ FE}}$$

4a) gesucht: Nullstellen im 1. Quadr.

$$f(x) = 0$$

$$-\frac{1}{3}x^3 + 3x = 0$$

$x_1 = -3$ (außerhalb des 1. Quadr.) $\quad x_2 = 0 \quad x_3 = 3$

$$A = \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 -\frac{1}{3}x^3 + 3x\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3$$

$$= 6{,}75 \text{ FE}$$

b)

1. Ableitung von f: $\quad f'(x) = -x^2 + 3$

Das lokale Extremum im I. Quadranten liegt bei der Extremstelle $x_E = \sqrt{3}$. Laut vorliegendem Graph handelt es sich um ein lokales Maximum. Die Funktion f ist also im Intervall $\sqrt{3} < x < 3$ monoton fallend.

Da die beschriebene Tangente im I. Quadranten ein gleichschenkliges Dreieck mit den Koordinatenachsen bilden soll, können die entsprechenden Schenkel nur gleichlange Abschnitte der Koordinatenachsen sein. Daraus folgt, dass die gesuchte Tangente den Anstieg -1 hat.

Für die x-Koordinate des Punktes P gilt also: $\quad f'(t) = -1$.

$-t^2 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad t^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 2; \quad t_2 = -2$ (liegt nicht im Intervall)

Der gesuchte Wert ist $t = 2$.

Lösungsvariante:

Tangente: $\quad y = mx + n \quad$ mit $\quad m = f'(t)$

$y = (-t^2 + 3) \cdot x + n$ und mit $P(t; f(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t$ folgt $n = \frac{2}{3}t^3$

$\Rightarrow$ Gleichung der Tangente: $\quad y = (-t^2 + 3) \cdot x + \frac{2}{3}t^3$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$R_t\left(\frac{-\frac{2}{3}t^3}{-t^2+3}; 0\right); \quad S_t\left(0; \frac{2}{3}t^3\right) \quad \Rightarrow \quad OR_tS_t$ gleichschenklig, falls $\frac{-\frac{2}{3}t^3}{-t^2+3} = \frac{2}{3}t^3$

$\Rightarrow \quad -\frac{2}{3}t^3 = \frac{2}{3}t^3(-t^2 + 3) \quad \Rightarrow \quad -1 = -t^2 + 3 \quad \Rightarrow \quad 0 = -t^2 + 4$

$t_1 = 2; \quad t_2 = -2$ (entfällt); $\quad$ Der gesuchte Wert ist $t = 2$

5a) $f(x) = a \cdot (x-0) \cdot (x-2) \cdot (x-4)$

$= a \cdot x \cdot (x-2)(x-4)$

$= a \; (x^2-2x)(x-4)$

$= a \; (x^3-2x^2-4x^2+8x)$

$= a \, (x^3-6x^2+8x)$

$P(1|3)$ liegt auf $f \Rightarrow f(1)=3$

$a \cdot (1-6+8) = 3$

$3a = 3$

$a = 1$

$\Rightarrow f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x-4)$

$= (x^2-2x) \cdot (x-4)$

$= x^3-6x^2+8x$

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'''(x) = 6$

N.B.: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0$

$x = 2$

H.B.: $f''(x)$ und $f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = 6 \neq 0$

$\Rightarrow$ WS bei $x=2$

y-Wert:

$f(2) = 0$

$t(x) = mx + b$

$m = f'(2) = -4$

$\Rightarrow t(x) = -4x + b$

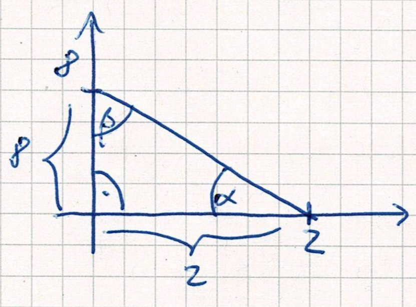
$N_2(2|0)$ auf $t \Rightarrow t(2) = 0$

$-4 \cdot 2 + b = 0$

$b = 8$

$\Rightarrow t(x) = -4x + 8$

c)



$t(x) = 0$

$-4x + 8 = 0$

$\underline{x = 2}$

Der Winkel am Koordinatenursprung ist ein rechter Winkel.

α lässt sich mit der Regel für Steigungswinkel bestimmen:

$\tan \alpha = f'(2)$

$\tan \alpha = -4$

$\alpha = \tan^{-1}(-4) \approx -75{,}96°$

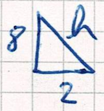
$\Rightarrow \alpha = 75{,}96°$

$\Rightarrow \beta = 180° - 90° - 75{,}96° = 14{,}04°$

Alternative: $\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{8}{\sqrt{2^2+8^2}}$

$\Rightarrow \alpha = 75{,}96°$

Hypotenuse:



$h^2 = 2^2 + 8^2$

$h = \sqrt{2^2+8^2}$

d) Die Stammf. müsste 4. Grades sein.
Dazu passt nur Graph II

Graph I: 2 Sattelpunkte und eine ES
↳ mind. 5. Grades
(weil die Grenzwerte gleich sind, sogar mind. 6. Grades)

Graph III: 5 Extremstellen
↳ mind. 6. Grades